Анализ

Подзадача №0

Както винаги, имаше подзадача с тестовите примери за обратна връзка от системата.

Подзадача №1

Възможен подход е директно прилагане на пълно изчерпване, а именно да разгледаме всяка една възможна подредица и да проверим дали има мажорант за $O(N)$ време на подредица.

Постигната сложност: $O(N)$

Подзадача №2

В тази подзадача има само две партии. Лесно се забелязва, че има мнозинство тогава и само тогава когато партиите не са с равни резултати. Заради това може да преброим в колко случая двете партии имат равен резултат и да извадим тази бройка от общия брой непразни подредици $- - 2^N - 1$ (всеки елемент или участва или не, като се маха празната подредица). Така нека от първата партия да има V гласоподавателя измежду гражданите и втората да има $N - V$. Тогава, отговорът ще е равен на ($\sum$ е знака за сбор, интерпретиран подобно на for цикъл):

$$\sum_{i=1}^{\min(V,N-V)} \binom{V}{i} \cdot \binom{N-V}{i}$$

Сега остана финален въпрос – как смятаме биномните коефициенти? Това може да го постигнем като използваме:

$$\binom{N}{K} = \frac{N!}{K!(N-K)!} \equiv N! \cdot (K!)^{MOD-2} \cdot ((N-K)!)^{MOD-2} \pmod{MOD}$$

За $MOD = 10^9 + 7$, където степенуваме на степен $MOD - 2$ за да разделим на съответните факториели, като в условието ни е казано, че това работи.

Така чрез бързо степенуване може да пресметнем биномните коефициенти.

Постигната сложност: $O(N\, log_2 MOD)$

Подзадача №3

Тук идва следващата ни идея – да видим как всяка една партия допринася към отговора. Тоест, тъй като само една партия може да има над половината от вота, ние може да преброим за всяка партия в колко избори може да бъде мажорирарща и да съберем тези бройки за да получим нашия отговор.

В тази подзадача пресмятането е по-лесно от предишната. За всяка партия има две възможности:

- Да мажорира изборите с 1 гласоподавател. Това би станало когато само той гласува. Така за може да добавим N към отговора, което ще вземе предвид този случай за всички партии.
- Да мажорира изборите с 2 гласоподавателя (ако има толкова измежду всички граждани). Това би станало единствено когато има до 1 друг гласуващ. Така в този случай ще има $N - 1$ възможни избора за текущата партия (1 за изборите само с тези 2 гласоподавателя и $N-2$ случая за изборите в които има още един гласуващ).

Преброяваме гласоподавателите за всяка партия откъдето намираме кои партии имат 2 гласоподавателя и пресмятаме отговора.

Подзадачи №4, 5 и 6

За тези подзадачи е нужно да стигнем до общата формула. Може да забележите, че тя е обединение на двете ни предишни формули. Нека да разгледаме по колко начина една партия с V гласоподавателя може да мажорира изборите. Тя може да ги спечели с някаква бройка гласуващи $x \leq V$ и да ги мажорира когато гласуващите за други партии y (сумарно $N - V$ на брой) са $< x$. Така като разгледаме по колко начина може да изберем самите гласуващи за печелившата партия и гласуващите за други партии, получаваме формулата:

$$\sum_{x=1}^{V} \sum_{y=0}^{\min(x-1, N-V)} \binom{V}{x} \cdot \binom{N-V}{y}$$

За 4-та подзадача може да преизчислим биномните коефициенти чрез прекомпют на база на триъгълника на Паскал, след което да сметнем отговора директно. На пръв поглед не е очевидно каква е сложността на този подход. Същевременно, може да забележим, че ако пресметнем този сбор за всяка една партия, то сборът на техните V-та ще бъде N, откъдето втората сума ще я пресмятаме сумарно N пъти. Тъй като тя взима до N члена, то общата ни сложност е $O(N^2)$.

За 5-та подзадача може да преместим $\binom{V}{x}$ извън втората сума и да получим, че горната формула е равна на:

$$\sum_{x=1}^{V} \binom{V}{x} \cdot \sum_{y=0}^{\min(x-1, N-V)} \binom{N-V}{y}$$

Забележете, че десните сборове за $\binom{V}{x}$ и $\binom{V}{x+1}$ се различават точно с един член. Така, ние може да пазим сборът в променлива, към която да добавяме съответната комбинация за текущото $\binom{V}{x}$, вместо всеки път да го изчисляваме наново, което свежда сложността ни до $O(N)$ пресмятания на комбинации. Към момента най-добрият ни подход включва $O(log_2 MOD)$ пресмятане, което е твърде бавно за $N = 2 \cdot 10^6$.

За шеста подзадача може да преизчислим обратните елементи на факториелите, тоест $(K!)^{MOD-2}$ за всяко $0 \leq K \leq N$. Това може да го постигнем по следния начин – пресмятаме самите стойности на факториелите под модула ни, като впоследствие намираме $(N!)^{MOD-2}$ за $O(log_2 N)$ време. Тъй като $N! \cdot (N!)^{MOD-2} = N! \cdot (N!)^{-1} = 1$, то $(N-1)! \cdot N \cdot (N!)^{MOD-2} = 1$. Така знаем, че като умножим $(N-1)!$ по $N \cdot (N!)^{MOD-2}$ получаваме 1, откъдето, по дефиниция, $((N-1)!)^{-1} = N \cdot (N!)^{MOD-2}$. Така може отзад-напред да намерим обратните стойности на факториелите за $O(N)$ време, с което сме готови.

За любопитните

Оказва се, че формулата за една партия, а именно (за $A = V$ и $B = N - V$):

$$\sum_{x=1}^{A} \sum_{y=0}^{\min(x-1, B)} \binom{A}{x} \cdot \binom{B}{y} =$$

Има по-добър вид:

$$= \sum_{i=0}^{A-1} \binom{A+B}{i}$$

Това се доказва чрез индукция. Забелязва се като се отпечатват стойности на тази формула за двойки (A, B) в конзолата.

Нямам добра експлицитна аргументация (във вида на биекция или какъвто и да е вид броене) защо това е вярно, единствено мога да си защитя доказателството по индукция. Ако някоя добра душа намери по-добър аргумент за коректността на това равенство извън "*Вярно е, защото е вярно*", бих се радвал да го сподели и на останалия свят.

Автор: Борис Михов