

Прим – решение

Атанас Димитров

Генерална постановка

Задачата изисква за всеки от дадените интервали $[a_i, b_i]$ да се намери броят на простите числа в него. По-запознатите участници трябва да са виждали и да мислят в посоката на решето на Ератостен.

Допълнително ще означим сумата на дължините на интервалите с $L = \sum_{i=0}^{N-1} (b_i - a_i + 1)$ и максималния десен край на интервал $B = \max_{i=0}^{N-1} b_i$.

Подзадача 1

За решаване на първия събтаск е достатъчно да забележим, че $B \leq 10^7$. Това директно води до съображението, че е достатъчно да разгледаме числата $1 \leq i \leq B$ и да запишем в масив `is_prime[i]` този отговор. Изчисляването на масива `is_prime[i]`, можем директно да направим чрез приложение на решето на Ератостен.

Обобщено, решето на Ератостен прави следните стъпки:

- Избира следващото неразгледано просто, нека го означим с p .
- Означава всички числа $kp \leq B$, които се делят на p , като съставни:
 - `is_prime[2p] = false`
 - `is_prime[3p] = false`
 - `is_prime[4p] = false`
 - ...

Тъй като може да изчислим масива `is_prime` веднъж в началото със сложност $O(B \log(\log(B)))$, за всяка следваща заявка трябва да обходим масива и да сумираме броя прости в $O(L)$ време. Това прави финалната сложност $O(L + B \log(\log(B)))$.

Подзадача 2

В тази подзадача е достатъчно да съобразим, че ни интересуват най-много $L \leq 10^3$ различни числа.

Нека разгледаме фиксирано число $1 \leq x \leq B \leq 10^{12}$. За да отговорим на въпроса дали x е просто, можем да забележим, че ако x беше съставно то би имало делител $1 \leq k \leq \sqrt{x}$. Така за проверка на въпроса дали едно число x е просто, можем да минем през всички числа $k \in [2, \sqrt{x}]$ и да проверим дали са делители на x . Това води до тест за простота със сложност $O(\sqrt{B})$ и общо $O(L\sqrt{B})$.

Доказателството на помощният факт, може да стане чрез разглеждане на случаи – нека разгледаме произволен делител $c \in [2, x - 1]$ на съставно x :

- Ако $c \leq \sqrt{x}$, можем да вземем $k = c$, което върши работа
- Ако $c > \sqrt{x}$, то нека вземем цялото число $k = \frac{x}{c}$, което води до:

$$k = \frac{x}{c} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}$$

Решение на цялата задача

За да достигнем до финалното решение се налага да комбинираме двата подхода представени за по-малките подзадачи.

Нека разгледаме интервал $[a_i, b_i]$, за който $1 \leq a \leq b \leq 10^{12}$ – от подзадача 2, знаем че за да определим дали $x \in [a, b]$ е съставно е достатъчно да проверим дали съществува $k \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{B} \leq \sqrt{10^{12}} \leq 10^6$, което да дели x . Така единствените делители, които трябва да пробваме са простите $\leq 10^6$.

Остава единствено да разберем как да правим проверката “паралелно”, за да завършим задачата. Нека копираме стъпките направена от решето на Ератостен:

- Избира следващото неразгледано просто $\leq 10^6$, нека го означим с p .
- Намира първото число $s \in [a, b]$, което се дели без остатък на p .
- Означава всички числа $kp \in [a, b]$, които се делят на p , като започва от s :
 - $\text{is_prime}[s] = \text{false}$
 - $\text{is_prime}[s + p] = \text{false}$
 - $\text{is_prime}[s + 2p] = \text{false}$
 - ...

Използвайки “стандартния” анализ на решето на Ератостен можем да сложим горна граница на ефикасността на решението $O(L \log(\log(B)))$ и на паметта $O(L + \sqrt{B})$, което взима максималния брой точки.