АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ТРИБОНАЧИ

Първо ще отбележим, че е достатъчно да се намери най-малкото естествено число *k*, за което $a_k = a_0$, $a_{k+1} = a_1$ и $a_{k+2} = a_2$. Освен това не е гарантирано, че ако $a_k = a_0$ и $a_{k+1} = a_1$, то $a_{k+2} = a_2$.

Задачата може да се реши като последователно се пресмятат елементите на редицата $\{a_n\}$ до намиране на интересуващото ни число *k*. Лесно може да се провери (с малка промяна в програмата, която решава задачата), че когато *P* приема стойности от 2 до 1000 задачата винаги има решение.

Тук ще изложим и доказателство на факта, че задачата има решение за всяко естествено число $P \geq 2$. Да разгледаме всички възможни тройки остатъци по модул *P*. Те са най-много P^3 на брой. Следователно ако вземем първите P^3+3 числа от $\{a_n\}$, ще имаме P^3+1 тройки от три последователни елемента на редицата $\{a_n\}$. От принципа на Дирихле следва, че поне две от тези тройки числа съвпадат, т.е. има числа *i* и *j* (*i* < *j*), за които е изпълнено: $a_i = a_j$, $a_{i+1} = a_{j+1}$ и $a_{i+2} = a_{j+2}$. Следователно членовете на редицата $\{a_n\}$ се повтарят циклично от номер *i* нататък. Сега единственият проблем е дали началната тройка $(0,0,1)$ е начало на първия цикъл или той започва на друго място в редицата? Да допуснем, че нямаме цикъл, започващ от a_0. Вече показахме, че има числа *i* и *j* (*i* < *j*), за които $a_i = a_j$, $a_{i+1} = a_{j+1}$ и $a_{i+2} = a_{j+2}$. Може да намерим a_{i-1} от рекурентната формула

$$a_{i-1} = \left(a_{i+2} - a_{i+1} - a_i + 2P\right)\%P = \left(a_{j+2} - a_{j+1} - a_j + 2P\right)\%P = a_{j-1}.$$

Разсъждавайки индуктивно, получаваме че, $a_0 = a_{i-j}$, $a_1 = a_{i-j+1}$ и $a_2 = a_{i-j+2}$.

Автор: Владимир Владимиров