Анализ на задача `fact`

Тагове: математика, канонично разлагане, двоично търсене, дълги числа

Нулева подзадача – 0 точки

Тази подзадача е оставена за обратна връзка от системата.

Подзадача 1 – 15 точки

Можем лесно да си докажем, че горната граница за отговора ни е K, защото $K!$ винаги се дели на K.

Ограничението на K е ниско, следователно можем да смятаме $N!$ за N от 1 до K и да проверим дали изпълнява условието.

Сложност: $O(K)$

Реализация: `fact_mitko_15p.cpp`, `fact_kiki_15p.cpp`

Подзадача 2 – 33 точки

Използваме същата идея, но извършваме пресмятанията с дълги числа.

Сложност: $O(K.\log_{10} K!)$

Реализация: `fact_mitko_33p.cpp`, `fact_kiki_33p.cpp`

Подзадача 3 – 54 точки

Тази подзадача би позволила обхождане на всички възможни отговори от 1 до K, но по какъвто и начин да пазим стойността на факториела, пак се оказва бавно. Тук вече се приближаваме към подход, който се възползва от каноничния вид на K, вместо стойността на K.

Можем да направим линейно търсене за N, само че вместо да се интересуваме от стойността на $N!$, разглеждаме новите прости множители, които допринася всяко ново число.

Лесно можем да забележим, че за да проверим дали $N!$ се дели на K, ни е достатъчно каноничното му разлагане, като всеки степенен показател на $N!$ трябва да бъде по-голям или равен от този на K (условие $*$). Една идея за решение е да правим канонично разлагане на всяко число от 1 до K, да добавяме към бройката на всеки прост делител на текущото число и на всяка стъпка да проверяваме дали се изпълнява условие $*$.

Забележете, че не е нужно за всяко число да гледаме всички прости делители, а единствено тези, които се срещат в K.

Сложност: $O(K.P + K \log K)$. Тъй като $K \leq 10^6$, на практика $P \leq 7$.

Реализация: `fact_mitko_54p.cpp`, `fact_kiki_54p.cpp`

Подзадача 4 – 13 точки

Тривиално е, че отговорът ни е $\max(d_1, d_2, \dots, d_P)$. Това е така, защото ако N е максималният прост делител, то $N!$ съдържа и всички по-малки прости делители.

Сложност: $O(P)$

Реализация: `fact_mitko_13p.cpp`, `fact_kiki_13p.cpp`

Подзадача 5 – 100 точки

Тук се нуждаем от няколко наблюдения:

1. Ако имаме число $N!$, което се дели на K, то $(N+1)!$ също се дели на K. Това е подсказка за двоично търсене по отговора, защото имаме монотонност.
2. Ако пресметнем минималното N, при което d_i има степенен показател $\geq s_i$ в $N!$, за всяко $1 \leq i \leq P$, тогава отговорът ни е максималното от тези стойности, защото тогава е гарантирано, че условието е изпълнено за всички прости делители. Тук идеята е подобна на миналата подзадача.
3. Проблемът ни остава намирането на степенния показател на всеки прост делител на $N!$. Ако делителят е d_i, то всъщност бройката е $\lfloor \frac{N}{d_i} \rfloor + \lfloor \frac{N}{d_i^2} \rfloor + \lfloor \frac{N}{d_i^3} \rfloor + \ldots$. Как доказваме това? За всяко d_i, броят числа от 1 до N включително, които се делят на d_i, е точно $\lfloor \frac{N}{d_i} \rfloor$. Но сега числата, които се делят на d_i^2, се броят само веднъж, а те имат степенен показател 2 и трябва да се броят два пъти. Затова можем още веднъж да добавим броя числа, които се делят на d_i^2, а именно $\lfloor \frac{N}{d_i^2} \rfloor$. Така продължаваме, докато знаменателят не надвиши N.

Така задачата ни всъщност става доста проста – за всеки прост делител пускаме двоично търсене по минималния отговор N, след което за проверката в двоичното търсене прилагаме формулата и сравняваме получения степенен показател със съответния на K. Крайният ни отговор е максималният от отговорите за всеки прост делител.

Сложност: $O(P. \log^2 M)$, където M е максималното възможно N, в случая $M = 10^{18}$.

Реализация: `fact_mitko_100p.cpp`, `fact_kiki_100p.cpp`

Автори: Димитър Шапатов, Кирил Зашев