Анализ на задачата "Таблица"

Задачата се състои в това да отговорим на Q заявки за минималната сума на път, който започва в клетка (x_s, y_s) и завършва в клетка (x_t, y_t) в таблица с размери $N \times M$. Движението по таблицата е разрешено само надолу или надясно, и се изисква да намерим най-малката възможна сума за всеки път.

Първа подзадача

Тази подзадача е най-проста, защото размерът на таблицата и броят на заявките са малки. Можем да използваме стандартно динамично за всяка заявка поотделно на.

Втора подзадача

Разликата с предходната подзадача е че броя заявки може да е голям. Може да забележим, че броя подтаблици е $O(N^2M^2)$ и съответно вместо да решаваме динамичното за всяка таблица поотделно, можем да групираме по горна лява клетка. При това решение трябва да внимаваме за използвана памет.

Трета подзадача

Тъй като имаме само един ред ($N = 1$), за тази подзадача просто забелязваме че има точно един път за всяка заявка. Така задача се свежда до заявки за сума в подмасив, което може да се реши със префиксен масив за (1) на заявка.

Четвъртата подзадача

За разлика от предишната подзадача, тук може да имаме голям брой пътища, въпреки че N = 5. Идеята тук е да се използва сегментно дърво върху M измерението, като във всеки връх $[l; r]$ ще пазим таблица $dp[up][down]$ = минималната сума на път от $(l; up)$ до $(down; r)$. Комбинирането на 2 върха може да се реализира за $O(N^3)$ наивно или за $O(N^2)$. При $O(N^3)$ решението, може да има нужда от оптимизации, като няколко идеи са да не пазим цялата таблица, а само клетките на диагонала $(up < down)$. За квадратното комбиниране, може да използваме идея подобна на Wombats от IOI 2013.

Общата сложност е доминирана от отговарянето на заявките, или $O(QN^2logM)$ или $O(QN^3logM)$ в зависимост от скоростта на комбинирането.

Като кратък коментар, бихме очаквали състезателите от разширения национален отбор да имат решение до тази подзадача.

Пета и шеста подзадача

Решенията на двете подзадачи са сходни, като разликата е колко оптимизирано е решението и дали използва структури от данни (или само масиви).

Основната идея е да решим заявките офлайн и да използваме разделяй и владей. По-формално, нека дефинираме процедура $solve(up, down, left, right)$, която решава всички заявки които са изцяло в подтаблицата $(up, left) - (down, right)$. За да решим задачата, трябва да извикаме $solve(1, n, 1, m)$.

Нека приемем че $right - left > up - down$ (обратният случай е симетричен). За по-просто ще бележим $w = right - left$ и $h = up - down$. Нека разделим таблицата на 2 равни части на база $mid = \frac{left+right}{2}$ и извикаме $solve(up, l, down, mid)$ и $solve(up, mid + 1, down, right)$. Така ще отговорим всички заявки при които двете точки са в една и съща част. За да отговорим останалите заявки, може да направим следното:

- За всяка точка по средната колона M прекъмпютваме отговорите до всяка точка от текущата подтаблица (подобно на подзадача 2). Сложността тук е $O(H^2W)$.
- За всяка заявка, знаем че оптималният път минава през някоя клетка от колона M. Можем просто да опитаме всички такива точки и да използваме прикъмпюта. Трябва да опитаме $O(H)$ различни точки тук, но не забравяйте че сме избрали $H < W$.

Ще забележим че всяка заявка бива разгледана точно на едно ниво в разделя и владей решението, така че общата сложност за тази стъпка ще е $O(min(N, M) \times Q)$, тъй като винаги избираме по-малката страна за да направим разделянето. Това е сравнително добро като сложност понеже $min(N, M) \leq \sqrt{N \times M}$.

Остава само да видим сложността за преизчисляването на динамичното в разделяй и владея. Нека $f(K)$ е горна граница за прикъмпюта във $solve$ за таблица с K клетки ($K = WH$). Поради подобен аргумент на горния, може да видим че $f(K) = O(K^{1.5})$ тъй като $min(W, H) \leq \sqrt{K}$. От тук следва че цялата сложност за таблица с големина K:

$$T(K) = 2T(K/2) + O(K^{1.5}) = O(K^{1.5})$$

Горното твърдение може да се докаже директно с мастърс теоремата или индукция, но интуитивно, прекъмпюта в първата стъпка на разделяй и владей решението доминира.

Общата сложност е $O((NM + Q)\sqrt{NM})$.

Автор: Радослав Димитров