Тагове	На пълното решение	На подзадачите
	Завъртане на координатна система Метяща права Дърво на Фенуик	Merge Sort Tree Дърво на Фенуик Разделяй и владей Метод на показалките

Анализ

Подзадача №1

Както винаги, оставих подзадача с тестовите примери, за да има по-добра обратна връзка от системата.

Подзадача №2

Може чрез най-наивното квадратно обхождане да проверим дали махнатановото разстояние на всяка двойка точки е до K.

Постигната сложност: $O(N^2)$

Имплементация: `points_12p.cpp`

Подзадача №3

Подзадачата е за 1D пространство вместо 2D. Тя е много по-лесна от оригиналната задача и може да се реши като се сортират точките спрямо координатите им, и се приложи Метода на показалките.

Постигната сложност: $O(N \log_2 N)$

Имплементация: `points_15p.cpp`

Подзадача №4 и Подзадача №5

Стандартен подход при боравене с неравенства от вида $|x_i - x_j| + |y_i - y_j| \leq K$ е да се разкрият скобите. Нека сортираме точките спрямо x_i и нека за всяко i преброим броя j-та, за които разстоянието между точките с номера i и j е $\leq K$. Тъй като $x_j \leq x_i$, може да разкрием единия модул: $x_i - x_j + |y_i - y_j| \leq K$. Така трябва да разгледаме два случая:

- $y_j \geq y_i$

Тогава неравенството се свежда до: $x_i - x_j + y_i - y_j \leq K$, тоест $-x_j - y_j \leq K - x_i - y_i$. Така искаме да преброим j-та, за които $j < i$, $y_j \leq y_i$ и $-x_j - y_j \leq K - x_i - y_i$.

- $y_j < y_i$

Тогава неравенството се свежда до: $x_i - x_j + y_j - y_i \leq K$, тоест $-x_j + y_j \leq K - x_i + y_i$. Така искаме да преброим j-та, за които $j < i$, $y_j > y_i$ и $-x_j + y_j \leq K - x_i + y_i$.

Към тази постановка може да се подходи по 2 начина.

Решение с Merge Sort дърво

Нека построим две MST-та по сортирания ред на точките спрямо y_i, едното съдържащо $-x_j + y_j$, другото $-x_j - y_j$. Обхождаме точките спрямо нарастващо x_i. Така, когато стигнем до точка, който в сортирания ред спрямо y_i се намира на позиция спрямо pos, то ние искаме да направим 2 заявки към мърдж сорт дърветата:

- Колко са точките на позиции спрямо y_i от 1 до $pos - 1$ (т.е. с $\leq y_i$), за които $-x_j - y_j \leq K - x_i - y_i$?
- Колко са точките на позиции спрямо y_i от $pos + 1$ до N (т.е. с $\geq y_i$), за които $-x_j + y_j \leq K - x_i + y_i$?

Съответно като сборът от отговорите на двете заявки е търсеният брой точки, с който текущата точка имат манхатаново разстояние е до K. И това решава задачата, нали? За жалост има още малко докато се достигне решението на подзадачата. Проблемът е, че в дърветата ще се намират и точките, които са на по-голяма позиция от текущата точка, т.е. с $x_j > x_i$, а ние в началото казахме, че ще броим тези j-та, за които $x_j \leq x_i$. Така ние трябва да правим update-и към дърветата. Това може да стане стандартно с дърво на Фенуик, с което вече решението ни е валидно.

Постигната сложност: $O(N \log_2^2 N)$

Имплементация: `pointsMST_77p.cpp`

Решение с Разделяй и владей

Разделяй и владей е доста стандартен начин за броене на двойки елементи в редица, спазващи някакво условие. Нека желаем да преброим броя двойки точки, с манхатаново разстояние до K, които в сортирания ред спрямо x_i се намират в интервала $[l, r]$ за $l < r$. За целта може да преброим броя двойки точки от $[l, mid]$ и $[mid + 1, r]$, където $mid = \left\lfloor \frac{l+r}{2} \right\rfloor$ и впоследствие да преброим броят двойки точки с $j \in [l, mid]$ и $i \in [mid + 1, r]$, които са на манхатаново разстояние до K. Очевидно $x_j \leq x_i$. Нека сортираме точките от l до mid и от $mid + 1$ до r поотделно спрямо y_i. С метода на показалките може да намерим за всяка точка $(x_{r`}, y_{r`})$ в дясната част тази позиция $l`$ в лявата част, за която:

- За $l \leq i \leq l`$, $y_i \leq y_{r`}$
- За $l` < i \leq mid$, $y_i > y_{r`}$

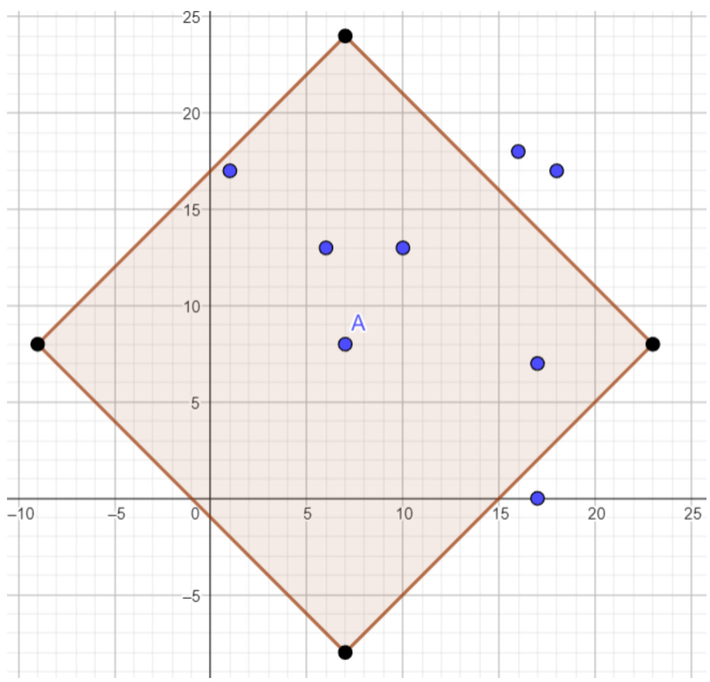
Така желаем да отговорим на същите две заявки от решението с MST, съответно за префикс и за суфикс в редица от точки. Така, с разделяй и владей, сведохме задачата до заявки от вида „Колко числа в префикс на редица са $\leq x$“. Това може да се отговори офлайн, с дърво на Фенуик, подобно на задача unique.

Постигната сложност: $O(N \log_2^2 N)$

Имплементация: `pointsD&C_77p.cpp`

Подзадача №6 и Подзадача №7

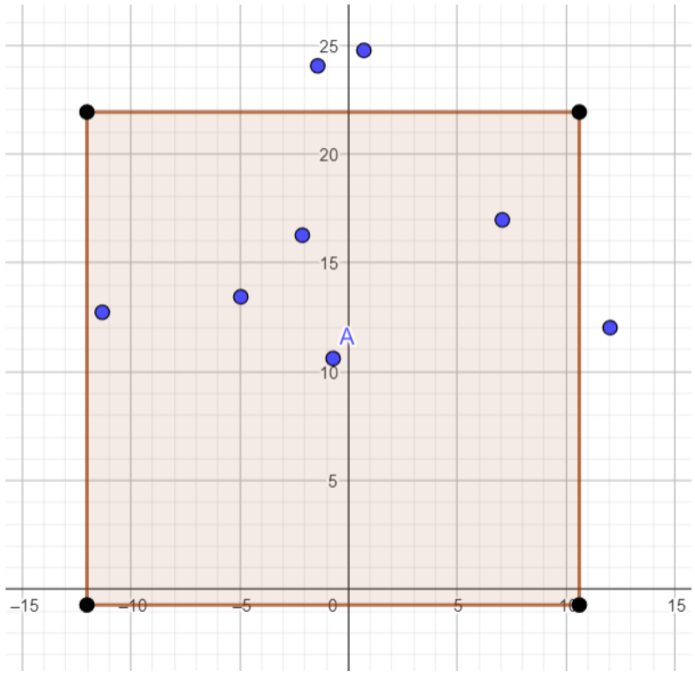
Горните две решения са тежки за импементация и се изисква опит с подобни задачи, за да се подкарат. Решението за 100 точки е много по-леко от тях, единствено трябва да мислим по-геометрично. Нека разгледаме Фигура 1, която илюстрира втория тестов пример.



Фигура 1

Сините точки са тези, които са от входните данни. Нека разгледаме кои точки са на растояние до K (в случая 16) от точка A. Всъщност, те попадат в квадрата, в който пресечната точка на диагоналите е т. A, диагоналите са успоредни на абсцисата и оргинатата и върховете на четириъгълника са на разстояние точно равно на K от A. Може да се упражните, като докажете твърдението. За примера описания квадрат е този, образуван от точките в черно. Всички точки, които лежат в него или по страните му са на разстояние до K от т. A. Нека допуснем, че има добър начин да изчислим колко точки ще лежат в даден квадрат от този вид. Тогава може да съберем намерения брой точки, като ако този брой е sum, отговорът ще е $\frac{sum-N}{2}$, защото всяка точка лежи в собствения си квадрат (ще я броим излишно) и ще преброим всяка двойка по два пъти.

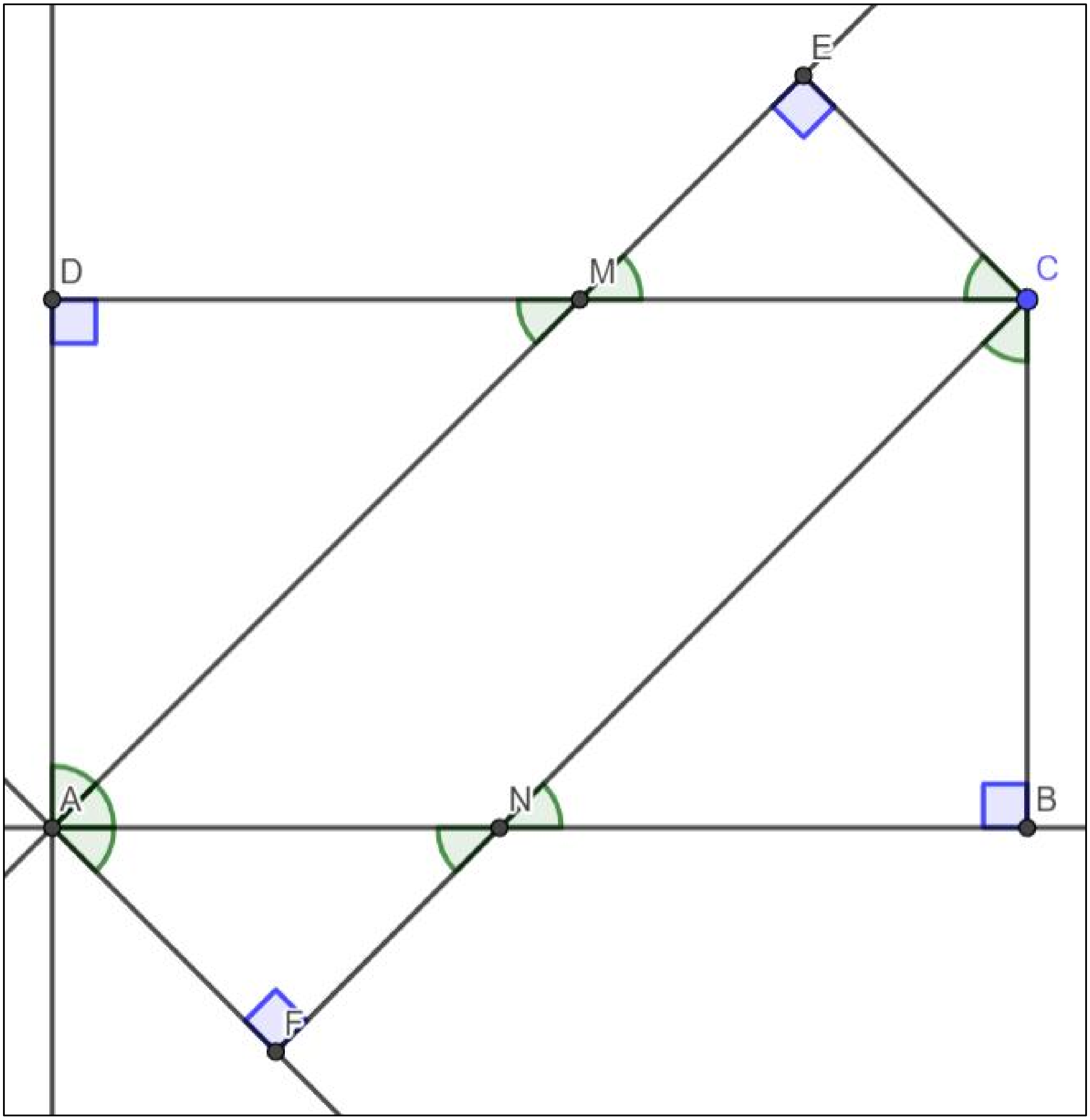
Остана да намерим удобен начин за изчисление на sum. Нека разгледаме Фигура 2:



Фигура 2

Каква е приликата ѝ с Фигура 1? Точно така, тук координатната система е завъртяна на 45 градуса, като квадратът вече е със страни, успоредни на координатните оси. Ако намерим начин да завъртим координатната система на 45 градуса, може много да си улесним задачата. Въпросът е как.

Има множество двуредови доказателства за това, че точка с координати (x, y) преди завъртането ще бъде с координати $(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}})$ или $(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$, зависещи от посоката на завъртането, но реших да видя как аз, с моите дърводелски знания по геометрия, бих го доказал. За целта може да погледнете чертежа на Фигура 3. Чертежа е за случая, в който $x \geq y$. Случая, в който $y < x$, е аналогичен.



Фигура 3

Зелените ъгли са по 45 градуса, а сините – по 90

Нека правите AB и AD да са съответно абсцисата и ординатата на първоначалната координатна система, а AE и AF – абсцисата и ординатата на завъртяната. Нека т. C е с координати (x, y) в първоначалната координатна система и да търсим новите ѝ координати. Тъй като завъртаме координатната система на 45 градуса, което ще рече, че завъртаме новите координатни оси на 45 градуса, то $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MAB = \sphericalangle BAF = 45°$. Построявам перпендикуляри CE, CD, CF и CB съответно към AE, AD, AF и AB. Тъй като координатите на C са (x, y), следва че $AB = CD = x$ и $AD = BC = y$. Целим да намерим дължините на CE и CF.

$$\sphericalangle MAD = 45°, \sphericalangle MDA = 90° \Rightarrow \sphericalangle AMD = 45° \Rightarrow \sphericalangle EMC = 45°, \text{но} \sphericalangle CEM = 90° \Rightarrow MCE = 45°$$

$$\sphericalangle NAF = 45°, \sphericalangle AFN = 90° \Rightarrow \sphericalangle ANF = 45° \Rightarrow \sphericalangle CNB = 45°, \text{но} \sphericalangle CBN = 90° \Rightarrow NCB = 45°$$

Следователно $\triangle AMD$,$\triangle MCE$,$\triangle AFN$ и $\triangle NBC$ са равнобедрени.

$AD = y \Rightarrow DM = y, \text{но } DC = x \Rightarrow MC = x - y.$

Нека $ME = EC = a$. Тогава от Питагорова теорема следва:

$ME^2 + EC^2 = MC^2 \Rightarrow 2a^2 = (x-y)^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, следователно x-координатата на C след завъртането ще бъде $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$.

Аналогично се изкарва y-координатата.

$BC = y \Rightarrow BN = y, \text{но } AB = x \Rightarrow NA = x - y.$

1) От питагорова теорема, следва че $CN^2 = BN^2 + BC^2 \Rightarrow CN^2 = 2y^2 \Rightarrow CN = y\sqrt{2}$.
2) $\triangle ANF \cong \triangle MEC$ по II ПЕТ, следователно СЕЕТ $FN = EC = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$.

Тогава $CF = CN + NF = y\sqrt{2} + \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{2y+x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Следователно y-координатата на C след завъртането ще бъде $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$. С това твърдението е доказано.

Не е удобно да се работи с дробни числа, заради това ще е практично да измислим как да премахнем $\sqrt{2}$. Всъщност, на колко ще са равни страните на квадратите на точките? Диагоналите са със страна K, следователно страните ще са равни на $K\sqrt{2}$. Какво ще стане, ако трансформираме $(x, y) \to (x - y, x + y)$ вместо $(x, y) \to (\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}})$? Тогава всичко ще се разшири $\sqrt{2}$ пъти и дължината на страната на правоъгълника ще е $2K$! От това следва, че ако разширим координатната система с $\sqrt{2}$, координатите на върховете на квадратите също ще са целочислени. Така може да забравим за дробните сметки.

Нека се върнем към информатиката. Сведохме задачата до „Дадени са N квадрата, намерете за всеки квадрат колко точки лежат в него.“. Абсолютно същата задача е давана през Летния турнир 2018 година в B група, като може да я решите тук. Може да сортираме квадратите и да приложим метода на „Метящата права“, като използваме и дърво на Фенуик. Вече трябва да можете да довършите решението сами, като още детайли може да видите в имплементацията ми.

Постигната сложност: $O(N \log_2 N)$

Имплементация: `points_100p.cpp`

Автор: Борис Михов