АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА

ЗАДАЧА

ЕКСКУРЗИЯ

Задачата се състои в това да разделим учениците на две множества: множество A – които ще излязат от дупката (нека те са k на брой ученици) и множество B – които ще останат, като искаме k да е максимално. Очевидно има значение в каква последователност излизат тези k ученици които сме избрали. Нека ги номерираме в реда в който са излезли от дупката.

С H_1 и L_1 означаваме съответно височината на тялото и височината на ръцете на първия излязъл, а с H_k L_k - на последния излязъл. Да означим с H_b сумата на височините на телата на хората в множество B. За да е изпълнено условието, ще трябва за всеки ученик i от множество A да е изпълнено $L_i + H_i + H_{i+1} + H_{i+2} .... + H_k + H_b >= D$, където D е дълбочината на ямата.

Можем да забележим че ако преместим някой ученик от A да излезе по рано от дупката, той пак ще има такава възможност (неравенството ще е изпълнено). Да разгледаме двама последователни ученици i и i+1 от A и да допуснем, че $H_i + L_i > H_{i+1} + L_{i+1}$. Ако разменим техните позиции, то условието на задачата пак ще е изпълнено. Следователно можем да считаме че ако i<j то $H_i + L_i <= H_j + L_j$ Сега вече знаем в каква последователност трябва да излизат учениците, за да имаме гарантирано оптимално решение. Сортираме във възходящ ред всички ученици по сумата на височините на краката и ръцете им в масива Z, т.е. $Z_i=H_i+L_i$. Остава да разпределим кои да са в множеството A и кои – в B. За тази цел ще използваме динамично програмиране.

Нека в някакъв момент i на брой човека са излезли от дупката и всичките са с индекси по-малки или равни на индекса j в масива Z. Примерно излезли са Z_1, Z_2 и Z_5 и j = 7.

Тъй като може да има много комбинации при които да излязат i човека, ние ще вземем тази, при която оставащия стълб от хора има максимална височина (сумите от телата H на оставащите хора да е максимална). Тази сума ще означим с f(i,j). Ако е невъзможно да излязат i човека с индекси по-малки или равни на j, ще казваме че f(i,j) = -1. Очевидно ако i>j, то f(i,j)=-1, а f(0,j) = sh, където sh е сумата на височините на телата на всички.

И сега самата рекурентната зависимост:

Да разгледаме f(i,j) /всички излезли досега са с индекси по малки от j/. Ако j-тия човек излезе от дупката, то ще трябва f(i-1,j-1) + Lj >=D и тогава f(i,j) = f(i-1,j-1) - Hj. (понеже напуска дупката). Ако j-тия човек остава в дупката, то f(i,j) = f(i,j-1). За да имаме оптимално решение, ще вземем по добрия от двата варианта:

$$f(i,j) = \max(f(i-1,j-1) - Hj, f(i,j-1)).$$

Ако $f(i-1,j-1) + Lj < D$, вземаме $f(i,j-1)$, при $f(i,j-1)>0$. Ако пък и двата варианта са невъзможни, пишем $f(i,j)=-1$.

Отговорът на задачата ще е максималното i за което f(i,n) не е -1.

Автор и тестове:Задачата е взета от руска олимпиада преди години.

Анализ и реализация: Павел Петров.