АНАЛИЗ РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ХОРИЗОНТАЛНО-ВЕРТИКАЛНА ИГРА

Да номерираме стълбовете на игралното поле с 1, 2, …, N отляво надясно и редовете с 1, 2, …, N отдолу нагоре.

Ще разгледаме първо частния случай, в който пионката отначало се намира в ъгъл. Тогава Хвърчилко може да спечели играта, като винаги прави най-дългия възможен ход. При това, независимо от действията на Вятърко, множеството от достъпните точки след всеки ход на Хвърчилко ще се състои от един или два правоъгълника, в които височината е строго по-малка от ширината, като Вятърко е принуден да влезе в един от тях по по-късата страна. Първите няколко хода на една примерна игра, в която Хвърчилко се придържа към тази стратегия, са показани на Рис. 1.

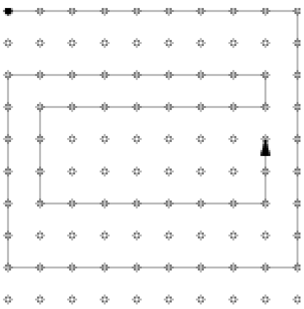

Рис. 1

След това ще разгледаме частния случай, в който N е нечетно, $N = 2M + 1$, и пионката отначало се намира в централната точка $(M + 1, M + 1)$. Нека Хвърчилко на първия си ход мести надясно до края, така че пионката да се озове в най-десния стълб. Да допуснем, без загуба на общност, че след това Вятърко мести нагоре. Тогава Хвърчилко може да направи така, че пионката никога да не напусне горната дясна четвъртинка от игралното поле. („Горна дясна четвъртинка“ в случая наричаме правоъгълника с долен ляв ъгъл $(M + 1, M + 2)$ и горен десен ъгъл (N, N).) За тази цел, достатъчно е самият той да играе така, че пионката да остава в тази четвъртинка. Тогава точките, посетени на първия ход на Хвърчилко, действат като стена, която не позволява и на Вятърко да напусне четвъртинката.

Оттук нататък, Хвърчилко може да използва точно същата стратегия, както и при начало в ъгъла. По-точно, той винаги ще прави възможно най-дългия ход, който не напуска горната дясна четвъртинка. Първите няколко хода на една примерна игра, в която Хвърчилко се придържа към тази стратегия, са показани на Рис. 2.

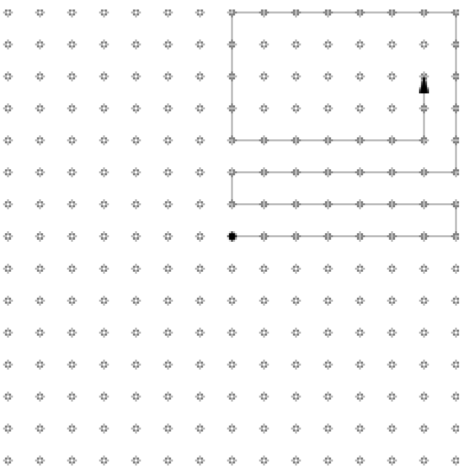

Рис. 2

Нека да обобщим наблюденията си от тези два частни случая. Ще обособим един много важен вид ситуация в играта.

Нека R е правоъгълник от точки с долен ляв ъгъл $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$, горен десен ъгъл $(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$, и страни $P = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$ и $Q = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}$, като при това $P > Q$. Нека всички точки в R все още са свободни. Освен това, нека пионката е в $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A} - 1)$ (точно под долния ляв ъгъл на R) и нека всички точки от вида $(x, y_\mathrm{A} - 1)$ и $(x, y_\mathrm{B} + 1)$ за x от x_A до x_B вече са посетени, или се намират извън игралното поле – това са точките, които ограждат R отдолу и отгоре.

Нека още Вятърко е на ход. Да допуснем, че Вятърко мести вътре в R. Тогава Хвърчилко печели, като играе винаги най-дългия възможен ход, който не напуска R.

Ситуация от този вид – както и нейните отражения и ротации – наричаме ***капан***. Когато $P > Q$ и пионката се намира до R, точно под или над ъгъл на R, капанът е заложен от Хвърчилко за Вятърко. Когато $P < Q$ и пионката се намира до R, точно вляво или вдясно от ъгъл на R, капанът е заложен от Вятърко за Хвърчилко. Рис. 3 показва един примерен капан.

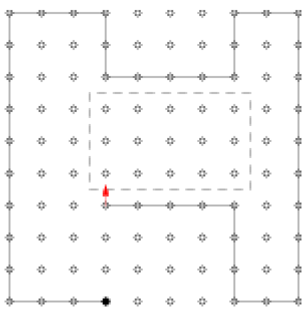

Рис. 3

Ако Вятърко е на ход и както под, така и над пионката има по един капан, тогава говорим за ***двоен капан***. (Не е нужно двата капана в един двоен капан да имат едни и същи размери. Всъщност, може и единият от тях да е “нулев” и да не съдържа никакви свободни точки. Ако и двата капана в един двоен капан са “нулеви”, играта, разбира се, вече е приключила.) Аналогично, двоен капан може да бъде заложен и от Вятърко за Хвърчилко, стига Хвърчилко да е на ход и както отляво, така и отдясно на пионката да има по един капан.

Ако някой играч влезе в капан, той губи. Обратно, ако някой играч успее да заложи на другия двоен капан, той печели.

Да се върнем към анализа на играта. Нека началната точка е **S**. Нека r е броят на точките в реда на **S** и вдясно от **S**, u е броят на точките в стълба на **S** и над **S**, и l и d са дефинирани аналогично като броя на точките вляво от **S** и под **S**, съответно. (Тогава координатите на **S** са $(l{+}1, d{+}1)$ и освен това $r{+}l = u{+}d = N - 1$.) Ще разгледаме няколко случая.

Случай 1. $\max\{r, u, l, d\} \in \{r, l\}$. Тогава Хвърчилко печели.
Без загуба на общност, нека $\max\{r, u, l, d\} = r$. Тогава на първия си ход Хвърчилко мести надясно до края, така че пионката да се озове в най-десния стълб. Това вкарва Вятърко в двоен капан.
Случай 2. Пионката се намира в първи или последен ред, но не в ъгъл. Тогава печели Вятърко.
Без загуба на общност, нека пионката се намира в най-горния ред, но не в ъгъл. Ако Хвърчилко мести където и да е, освен в ъгъл, тогава на следващия ход Вятърко мести в ред 1 и така вкарва Хвърчилко в двоен капан. Остава да разгледаме случая, в който Хвърчилко мести в ъгъл – без загуба на общност горния ляв ъгъл.
Вятърко отговаря, като мести в долния ляв ъгъл. Сега ако Хвърчилко мести където и да е, освен в долния десен ъгъл, на следващия ход Вятърко мести в ред $N - 1$ и така вкарва Хвърчилко в двоен капан. Остава да разгледаме случая, в който Хвърчилко мести в долния десен ъгъл.
Вятърко отговаря, като мести в горния десен ъгъл. Каквото и да отговори Хвърчилко (ако изобщо може да отговори нещо – в случая $r = 1$ Вятърко вече е спечелил), на следващия ход Вятърко мести в ред 2 и така вкарва Хвърчилко в двоен капан.
Случай 3. Пионката се намира във вътрешен ред, като $\max\{r, u, l, d\} \notin \{r, l\}$. Тогава отново печели Хвърчилко, но стратегията му е по-сложна, отколкото в *Случай* 1.
Нека, без загуба на общност, $r \geq l$ и $u \geq d$. На първия си ход Хвърчилко мести надясно до края, така че пионката да се озове в най-десния стълб. Това създава капан за Вятърко надолу, така че можем да смятаме, че на следващия ход Вятърко мести нагоре. (На това място – както и в следващия параграф – използваме съществено факта, че игралното поле е квадратно. Наистина, за да се уверим, че отдолу възниква капан за Вятърко, трябва да проверим, че $d < r+1$. Това е така, защото от $l < u$ имаме, че $d = N - 1 - u < N - 1 - l = r$.)
Да означим реда на началната точка **S** с L. Ако Вятърко в който и да е момент от играта постави пионката в ред под L, тогава Хвърчилко я мести надясно докрая, така че тя да се озове в най-десния стълб, и с това вкарва Вятърко в двоен капан. Следователно, оттук нататък можем да смятаме, че пионката никога не се спуска под ред L. (Напълно възможно е, обаче, пионката да се озове в ред L неколкократно.)
Сега ще раздробим Случай 3 на още два подслучая.
Случай 3а. $d \geq 2$. Тогава Хвърчилко играе по следния начин. Ако Вятърко се вкара сам в капан, по-нататък всичко е ясно. В противен случай, Хвърчилко първо проверява дали се намира в ред L. Ако да – премества пионката една позиция надясно. Ако не – прави възможно най-дългия хоризонтален ход и след това проверява колко непосетени точки са останали в ред L. Ако са поне две, нищо особено не се случва. Ако обаче са само нула или една, тогава Вятърко е хванат в двоен капан и Хвърчилко по-нататък играе съгласно стратегията за двойните капани.
Да обясним накратко защо тази стратегия работи. Във всеки един момент от играта, посетените точки в ред L се състоят от два непрекъснати отрязъка: един от началната точка **S** до десния край на игралното поле, и един от левия край на игралното поле до някаква точка (x_C, y_C) в ред L. Ако пионката никога повече не стъпи в ред L, тогава достъпните точки над ред L действат точно като капан за Вятърко. Ако пионката посети ред L отново, то тя непременно се озовава именно в точката $(x_C + 1, y_C)$. Тогава Хвърчилко я премества в точката $(x_C + 2, y_C)$ и Вятърко е принуден да върне пионката в „псевдокапана“ над ред L.
Леко се доказва, че в момента, в който в ред L повече не остава място за повторения на тази маневра, „псевдокапанът“ се е свил толкова много, че Хвърчилко може да вкара Вятърко в истински двоен капан. Рис. 4 показва първите няколко хода на една примерна игра, в която Хвърчилко се придържа към тази стратегия.

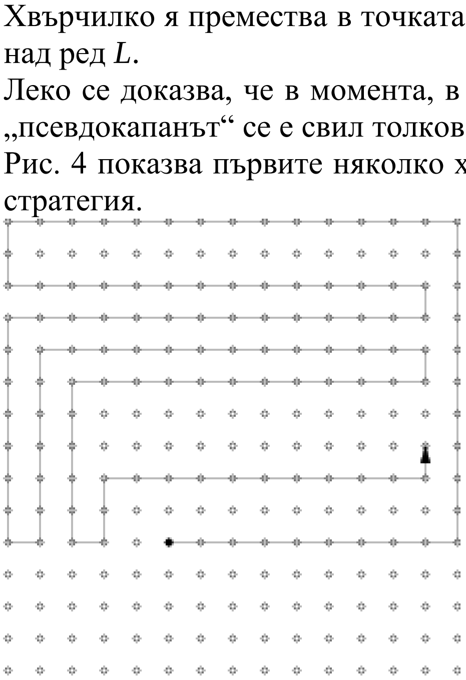
Рис. 4

Случай 3б. $d = 1$. Стратегията на Хвърчилко в този подслучай е точно същата, както в Случай 3а, с една малка промяна. Ако на първия си ход Вятърко постави пионката в горния десен ъгъл, Хвърчилко след това я премества на една позиция вляво. Нетният ефект от този ход е, че след първите пет хода се създава ситуация, която почти напълно имитира сценария, в който първият ход на Вятърко не е в ъгъла.
Причината за тази промяна е, че ако Хвърчилко следва стратегията от Случай 3а сляпо, тогава в ендшпила – когато в ред L вече няма място за повече повторения на ключовата маневра – може и да се окаже, че “псевдокапана” не се е смалил достатъчно, че Хвърчилко да може да заложи истински двоен капан, и всъщност печели

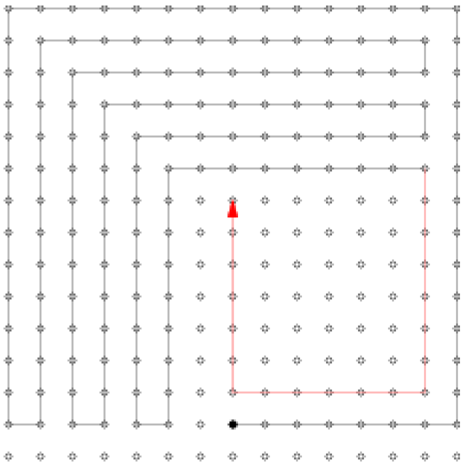

Рис. 6

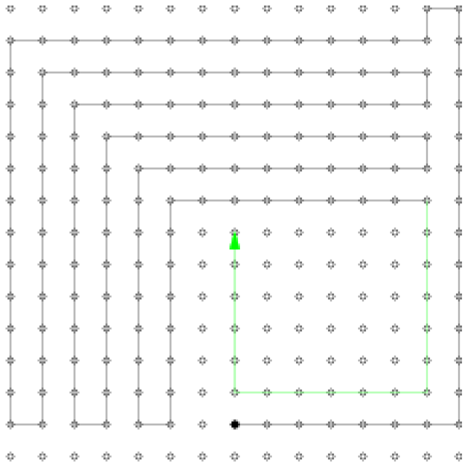

Рис. 6

Вятърко. Рис. 5 показва Случай 3б без промяната; червената линия показва ходовете от момента, в който Вятърко би трябвало да се озове в двоен капан нататък – в действителност този, който се оказва хванат в двоен капан е Хвърчилко. Рис. 6 показва Случай 3б с промяната; този път зелената линия показва ходовете, изиграни в успешно заложения двоен капан за Вятърко.

С това разглеждането ни на случаи приключва. Казано накратко, Вятърко печели за всички начални точки от първия и последния ред, освен ъглите, и Хвърчилко печели за всички останали възможни начални точки.

Забележка. Подобна игра се разглежда в задача 4 за 8-9 клас от основния вариант на пролетния тур на Турнира на Градовете за 1995-1996г. (Същата задача се среща и под номер 4 в темата за 10 клас на Московската олимпиада по математика за същата учебна година, както и под номер М1558 в задачника на списание „Квант“, брой 4 за 1996г.) В тамошната игра началната точка винаги е ъглова и всеки от двамата играчи може да мести и в четирите възможни посоки. Този вариант на играта се разрешава напълно от стратегията на най-дългите ходове.

Автор: Николай Белухов