

Анализ на задача birthdays

Тагове: DFS, най-дълъг път

Решение за 8 точки (10%)

Тук можем да направим пълно изчерпване за реда на приятелите при посещаването им. Все пак трябва предварително да изчислим пътя между всеки два върха, за да можем директно да смятаме общото време.

Сложност: $O(N^2 + N \cdot K!)$.

Решение за 38 точки (50%)

Ограниченията ни позволяват да разгледаме търгването от всеки възможен връх. Трябва да направим наблюдението какъв е оптималният път на обхождане на приятелите. Нека да разгледаме тази част от дървото, която съдържа началния връх и върховете празнуващи, както и върховете "между" тях. Останалите върхове, които не лежат на път между началния връх и празнуващите, няма да е оптимално да бъдат използвани. Нека да променим леко търсеното и вместо път искаме цикъл, т.е. да се върнем обратно в началния връх. Можем да забележим, че оптималното изминато разстояние е равно на два пъти по сумата на ребрата в ограничената част. Това е така, защото като отиваме до всеки връх, после ще трябва да се върнем обратно и ще повторим всяко ребро по два пъти по някое време. Понеже в нашата задача търсим път, то всъщност значение има само последният празнуващ, при който ще отидем, защото няма да повторим ребрата на пътя от него до началния връх. Така всъщност, за да намерим минималното време, трябва накрая да оставим върха с най-дълъг път от началния и отговора получаваме като извадим този най-дълъг път от два пъти сумата на ребрата в ограничената част. Тази информация лесно можем да намерим с по един DFS от всеки възможен начален връх.

Сложност: $O(N^2)$.

Решение за 75 точки (100%)

Трябва още малко да помислим как се получава оптималния отговор за всеки начален връх. Нека коренуваме дървото в някой от върховете празнуващи и разгледаме ограничената част, която включва само върховете празнуващи и тези "между" тях. Сравнително лесно можем да модифицираме алгоритъма за намиране на най-дългия път от всеки връх до някой друг, да търси само до върховете празнуващи. Ще разгледаме два случая за началния връх. Ако началният връх е в ограничената част от върховете празнуващи, то тя съвпада и с ограничената част при добавяне на началния връх и просто ни трябва сумата на ребрата в нея. Ако началният връх не е в ограничената част, то всъщност ограничената част, която го включва, е тази на върховете празнуващи и ребрата от пътя от него до най-близкия връх празнуващ (този връх е всъщност най-близкият предшественик на началния връх, защото коренувахме дървото в празнуващ). Това означава, че с малко повече DFS-и можем да открием всички нужно, за да сметнем директно отговора за всеки начален връх:

- върховете в ограничената част на върховете празнуващи;
- добавеното разстояние за всеки връх при включването му в ограничената част;
- най-дългия път от всеки връх до връх празнуващ.

Сложност: $O(N)$.

Автор: Илиян Йорданов (заета)