АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА МАГИСТРАЛИ

Първото нещо, което трябва да се съобрази е, че положението на двете магистрали се определя от координатите на пресечната им точка.

Наивното решение е да се пробва всяка точка с целочислени координати (x_0,y_0) за пресечна точка на магистралите и за такова разположение на магистралите да се изчислява максималното разстояние от град до тях. След това да се вземе минимумът на тези максимални разстояния и едно от разположенията на магистралите (т.е. пресечната им точка), което отговаря на този минимум. Това решение има сложност $O(K.N^2)$.

Решението, което решава задачата в пълния ѝ обем използва двоично търсене по отговора.

Нека имаме някакво разстояние *d*. Това разстояние ще наричаме **допустимо**, ако съществува такова разположение на магистралите, че максималното разстояние от град до тях е по-малко или равно на *d*. Допустимите разстояния притежават следните две очевидни свойства:

1. Ако d_1 е допустимо разстояние и $d_2 > d_1$, то d_2 също е допустимо разстояние.
2. Ако d_1 НЕ е допустимо разстояние и $d_2 < d_1$, то d_2 също НЕ е допустимо разстояние.

Това ни позволява да търсим исканото оптимално разстояние като **минимално допустимо разстояние,** използвайки двоично търсене по отговора.

Ще започнем от разстояние $d = N$, което очевидно е допустимо разстояние и на всяка стъпка от двоичното търсене ще формираме нова, по-малка стойност на *d*, която ще проверяваме за допустимост. И така, докато не успеем повече да намалим стойността на допустимото разстояние.

За да реализираме тази идея, трябва да разполагаме с алгоритъм, който бързо проверява дали дадено разстояние *d* е допустимо.

Нека вертикалната магистрала има *x*-координата x_0. Тогава градовете с *x*-координата [x_0-*d*, x_0+*d*] ще удовлетворяват условието за допустимост. Останалите градове ще се намират на разстояние по-голямо от *d* от вертикалната магистрала. За да бъде *d* допустимо разстояние, трябва разстоянието от тези градове (извън ивицата [x_0-*d*, x_0+*d*]) до хоризонталната магистрала да бъде по-малко или равно на *d*. *Това е възможно тогава и само тогава, когато разликата между максималната и минималната y-координати на тези градове е по-малка или равна от 2d.*

При зададени два града, съществува вертикална магистрала, такава че всеки от тях се намира на разстояние по-малко или равно на *d* от нея, тогава и само тогава, когато разликата между *x*-координатите им е по-малка или равна на *2d.*

Тези съображения лежат в основата на следния алгоритъм за определяне допустимостта на дадено разстояние *d.*

Сортираме градовете по техните *x*-координати. С асинхронно движение на два указателя отляво надясно разглеждаме всички ивици от град *i* до град *j* в сортирания масив ($i \leq j$), такива че „ширината“ им по оста *x* е по-малка или равна на *2d*. Това обхождане е линейно по броя на градовете *K.* За всяка такава ивица проверяваме дали градовете, които остават извън нея удовлетворяват условието разликата между максималната и минималната им *y*-координати да е по-малка или равна на *2d.* Ако има такава ивица, то *d* е допустимо разстояние – преминаваме към следваща стъпка на двоичното търсене.

Забележете, че проверката на разликата на максималната и минималната *y*-координати винаги е за множество от градове с индекси от 1 до *i-1* и от *j+1* до *K*, т.е. в началото и в края на сортирания масив. Това позволява минимумите и максимумите на *y*-координатите на такива отрязъци от масива да бъдат сметнати линейно преди да започне същинското двоично търсене и проверки за допустимост на разстоянията. Това решение е със сложност *O(KlogN).*

Автор: Руско Шиков