АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
СУПЕРМАГИЧЕСКИ КВАДРАТ

A	B	C
D	K	F
G	H	I

Квадрат 1

Разглеждаме супермагическия квадрат (**1**) със супермагическо число M. Ако умножим централната хоризонтала, централната вертикала и двата диагонала, ще получим M^4. От друга страна, произведението е $(D\times K\times F)\times(B\times K\times H)\times(A\times K\times I)\times(C\times K\times G) = (A\times B\times C)\times(D\times K\times F)\times(G\times H\times I)\times K^3=M^3\times K^3$. Веднага следва, че $M=K^3$, т.е., <u>*супермагическото число трябва да е точно кубът на зададеното средно квадратче*</u>.

Нека $M = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$, където p_i са прости, а α_i са цели положителни числа, е каноничното представяне на супермагическото число на едно решение на задачата. Тогава, ако запишем в квадрат 3×3 показателите, с които участва кое да е от простите числа p_i в съответния елемент на супермагическия квадрат, тези показатели трябва да образуват обикновен „псевдомагически квадрат“ („псевдо“, доколкото някои от числата могат да са нули и не трябва непременно да са различни) с (псевдо)магическо число α_i. От казаното по-горе следва, че в M могат да участват само и непременно простите делители на K, при това – всеки със степен точно три пъти по-голяма. Така задачата се свежда до намиране на няколко псевдомагически квадрати – по един за всеки прост делител на K.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Квадрат 2

Нека (**2**) е един пседвомагически квадрат с псевдомагическо число S. Аналогично на по-горе, ако сега съберем централната хоризонтала, централната вертикала и двата диагонала, ще получим $4S$. Тази сума е $(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(c+e+g) = (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)+3e=3S+3e$. Очаквано следва, че $S=3e$. От това равенство можем да извлечем следните изводи, съответни на първото разглеждане:

1. Псевдомагическите числа се делят на 3 (защото e е цяло);
2. Централното квадратче винаги трябва да е една трета от псевдомагическото число.

x	y	$3t\text{-}x\text{-}y$
$4t\text{-}2x\text{-}y$	t	$2x+y\text{-}2t$
$x+y\text{-}t$	$2t\text{-}y$	$2t\text{-}x$

Квадрат 3

На тези изводи може да се основава алгоритъм за генериране на псевдомагически квадрати с фиксирано магическо число $S=3t$. Като поставим t в центъра и изберем параметри x и y (например, съответно квадратчето в горния ляв ъгъл и това вдясно от него), пседвомагическият квадрат ще бъде определен еднозначно. В конкретната задача, разбира се, ни интересуват решения, при които стойностите във всички квадратчета са неотрицателни. Трябва да подберем и такива псевдомагически квадрати, съчетаването на които дава различни числа в крайния супермагически квадрат. При такова разглеждане е по-удобно да работим с елементите в каноничен вид.

На тази база (квадрат **3**) можем да организираме изчерпващ алгоритъм.

Ако разгледаме ситуацията по-дълбоко, можем да стигнем до по-сериозни правила и директни конструкции за решаване на задачата.

След като си дадем сметка, че псевдомагическото число е фиксирано на K^3 и няма какво да оптимизираме, трябва само да намерим решение или да установим, че такова няма. Разглеждаме един прост делител p_i на K. Степента q, с която той участва в разлагането на M, е $3\alpha_i$ (тази, с която участва в разлагането на K). Според предишните разглеждания, q пък ще е псевдомагичско число за някой псевдомагичски квадрат (**3**).

Ще отбележим, че, ако K е 1 или степен на просто число, за да не променим стойността на централното квадратче, можем да го съчетаваме само с псевдомагически квадрати, които имат $t=0$.

- Веднага се вижда, че при $t=0$ единственото неотрицателно решение се получава при $x=y=0$ и всички квадратчета са нули. От това следва също и че зададената задача <u>няма решение, ако $K=1$</u>.

- При t=1 решенията са от вида

```
1 1 1         0 2 1
1 1 1    и    2 1 0    (и симетрични на него).
1 1 1         1 0 2
```

Следователно, зададената задача няма решение и в случаите, когато K е просто (ще се повтарят числа).

- При t=2 решенията са повече, но представянията на 6 като сума от три събираеми, едното от които е централното 2, са 0+2+4, 1+2+3 и 2+2+2. Трябват ни даже 4 представяния, в които участва 2, така че поне едно от тях ще се повтаря, което означава, че в решенията винаги ще има две повтарящи се числа (всъщност – ще има поне три повторения). Следователно, зададената задача няма решение, когато K е квадрат на просто число.
- Оказва се, че съвсем аналогично стоят нещата при t=3: представянията на 9 като сума от три събираеми, едното от които е централното 3, са 0+3+6, 1+3+5, 2+3+4 и 3+3+3. Тъй като ни трябват 4 от тях, или поне две ще се повтарят, или ще трябва да ги имаме и четирите, но в последното от тях също има повторение. Значи задачата няма решение и когато K е куб на просто число.
- С това обаче аналогиите свършват. При t=4 вече има псевдомагически квадрати с различни стойности в квадратчетата, например

```
1 6 5
8 4 0        (1)
3 2 7
```

Което пък директно дава решение и на зададената задача. Като имаме предвид, че добавянето на 1 към всяка клетка от псевдомагическия квадрат не променя неговите свойства, това разсъждение показва начин за получаването на решение и при t>4.

- Остана да разгледаме случая, когато K има поне два различни прости делителя, ще ги означим с p_1 и p_2. Съчетаването на двата псевдомагически квадрата

```
0 2 1       1 0 2              (0,1) (2,0) (1,2)
2 1 0   и   2 1 0   ще даде    (2,2) (1,1) (0,0)     (2)
1 0 2       0 2 1              (1,0) (0,2) (2,1)
```

Както се вижда, всички наредени двойки са различни, което осигурява и числата в супермагическия квадрат да са различни. Добавянето на 1 към всяка клетка на някой от съчетаваните два квадрата не променя това свойство, следователно това е конструкция за получаване на решение, независимо от степените, с които p_1 и p_2 участват в разлагането на K. Останалите прости делители на K (ако има такива) могат да участват като множители във всяко квадратче на супермагичския квадрат със същата степен, с която участват в разлагането на K. Така получаваме конструктивен алгоритъм и в този случай.

Както се вижда, макар и супермагическото число да е кубът на централното, при тези конструкции най-голямото число, което може да участва в изхода за магическия квадрат, не надхвърля квадрата на централното, следователно такава реализация позволява всеки извеждан елемент да се събира в 64-битов цял тип без знак.

Анализ: Павлин Пеев
Решение: Павлин Пеев