АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА МИДИЧКИ

Когато $n = 1$, получаваме известна задача: един от начините Хаос да се справи с възможно най-малък брой кутийки е те да съдържат $1, 2, 4, \ldots, 2^k, 2^{k+1}$ мидички, където $2^k < a_1 \leq 2^{k+1}$. След това Аномалия ще получи тези кутийки, които отговарят на единиците в двоичния запис на броя мидички, които е поискала.

Какво да правим, когато $n > 1$? Възможно най-простият подход е да опаковаме по един такъв комплект за всеки от приятелите на Хаос: това ни дава решение с $\lceil \log_2 a_1 \rceil + \lceil \log_2 a_2 \rceil + \cdots + \lceil \log_2 a_n \rceil$ кутийки. Но това не е минимумът.

Дали има някакви кутийки, които Хаос задължително трябва да опакова? Да: ако всички поискат само по една мидичка, тогава всеки от тях трябва да получи точно по една едномидичкова кутийка. Това означава, че Хаос трябва да опакова поне n кутийки с по една мидичка.

Ами ако всички поискат по две мидички? Тогава, освен тези n, Хаос трябва да разполага и с още няколко кутийки с по една или две мидички. (Възможно най-малкият брой допълнителни кутийки е $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, но все още не знаем дали този избор няма да ни лиши от гъвкавост, когато подготвяме по-големите кутийки и така да доведе до по-голям общ брой.)

Като разсъждаваме така и по-нататък, виждаме, че броят мидички в кутийките на Хаос не трябва да расте твърде бързо. Колко точна оценка можем да получим по този начин?

Да подредим кутийките на Хаос по големина, $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$. Видяхме, че $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$, … , $x_n \leq 1$, $x_{n+1} \leq 2$, … , $x_{n+r} \leq 2$, където r зависи от броя a_i, които са по-големи или равни на две.

Представете си, че вече сме получили оценките $x_1 \leq c_1$, $x_2 \leq c_2$, … , $x_i \leq c_i$. Да оценим x_{i+1}.

Да допуснем, че $x_{i+1} > l$ и да се опитаме да си представим сценарий, който да затрудни Хаос възможно най-много. Ако всички поискат не повече от l мидички, то всички кутийки от x_{i+1} нататък няма как да са ни полезни. Това означава, че ще трябва да изпълним техните желания с помощта на най-много $x_1 + x_2 + \ldots + x_i \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_i$ мидички.

От друга страна, най-големият брой мидички, които приятелите на Хаос могат да поискат, ако всеки поиска не повече от l, е

$$S(l, a_1, a_2, \cdots, a_n) = min(l, a_1) + min(l, a_2) + \cdots + min(l, a_n)$$

Следователно, $S(l, a_1, a_2, \cdots, a_n) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Нека $P(c, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е най-малката стойност на l, за която $S(l, a_1, a_2, \ldots, a_n) > c$.

Получихме, че $x_{i+1} \leq P(c_1 + c_2 + \ldots + c_i, a_1, a_2, \ldots, a_n) = c_{i+1}$.

Този процес ще спре тогава, когато $c_1 + c_2 + \ldots + c_w \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$: понеже $S(l, a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, в този случай c_{w+1} няма да е дефинирано. Понеже първите i кутийки на Хаос съдържат не повече от $c_1+c_2+\ldots+c_i$ мидички и всички кутийки на Хаос трябва да съдържат поне $a_1+a_2+\ldots+a_n$ мидички общо, оттук следва, че $m \geq w$.

Ще докажем, че тази оценка е точна. Когато $n = 1$, Хаос може да събере правилния брой мидички и без да използва двоична бройна система по следния начин: на всяка стъпка, тя избира най-голямата кутийка, която не превишава оставащия брой мидички за събиране.

Ще докажем, че същият алгоритъм работи и при $n > 1$. Ще направим това по индукция, като междинните стъпки в индукцията ще бъдат комплекти от кутийки, които също изпълняват нашите оценки, но не непременно толкова строго.

По-точно, казваме, че една редица $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$ е *достатъчно бавна* за ограниченията a_1, a_2, …, a_n, ако за всяко $i \geq 0$ имаме, че $x_{i+1} \leq P(x_1 + x_2 + \ldots + x_i, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (което е същото като $S(x_{i+1} - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_i)$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_m \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Нека x_j е най-голямата кутийка, която не е по-голяма от a_1, така че $x_j \leq a_1 < x_{j+1}$. Да дадем тази кутийка на Аномалия: остава ни редицата $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$. Ще проверим, че тази редица е достатъчно бавна за ограниченията $a_1 - x_j, a_2, \ldots, a_n$.

Когато $i \leq j\text{-}2$, $S(x_{i+1}-1, a_1-x_j, a_2, \ldots, a_n) \leq S(x_{i+1}-1, a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq x_1+x_2+\ldots+x_i$.

Когато $i \geq j$, $S(x_{i+1}-1, a_1-x_j, a_2, \ldots, a_n) = S(x_{i+1}-1, a_1, a_2, \ldots, a_n) - x_j) \leq x_1+x_2+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1}+\ldots+ x_i$.

Най-накрая, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{j-1} + x_{j+1} + \ldots + x_m \geq (a_1 - x_j) + a_2 + \ldots + a_n$.

И така, можем да продължим по същия начин и по-нататък: на следващата стъпка ще дадем на Аномалия най-голямата кутийка, която не е по-голяма от $a_1 - x_j$, и така нататък, докато тя получи искания брой мидички. След това можем да повторим процеса с Беля, и така нататък, докато всички получат толкова мидички, колкото са поискали.

Да оценим бързодействието на алгоритъма. Отначало за $O(n \log n)$ стъпки сортираме $a_1, a_2, \ldots, a_n$, при което се получават $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$. За още $O(n)$ стъпки пресмятаме всички $a'_i + a'_{i+1} + \cdots + a'_n$, така че след това да можем константно да пресмятаме $S(l, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. По-нататък, $P(c, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ намираме така: с двоично търсене за $O(\log n)$ стъпки намираме i, такова, че $S(a'_i, a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq c \leq S(a'_{i+1}, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ и полагаме $P(c, a_1, a_2, \cdots, a_n) = a'_i + 1 + \left\lfloor \frac{c - S(a'_i, a_1, a_2, \cdots, a_n)}{n-i} \right\rfloor$. Остава да видим колко пъти ще ни се наложи да намираме $c_{i+1} = P(c_1 + c_2 + \ldots + c_i, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Имаме, че на всяка стъпка $c_{i+1} \geq \frac{n+1}{n} c_i$ и следователно $w \leq \log_{1+\frac{1}{n}} \max_i\{a_i\}$. Понеже $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$, оттук следва, че $w = O(n \log \max_i\{a_i\})$. По този начин, целият алгоритъм има сложност $O(n \log n \log \max_i\{a_i\})$.

Автор : Николай Белухов
Решение: Николай Белухов и Емил Келеведжиев