

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА МЕХАНИК

Ще започнем с дефиниция на понятието **биекция**, което ще използваме по-нататък. Нека са дадени две множества A и B и функция $f: A \rightarrow B$. Ще казваме, че f е **биекция** между A и B (или **взаимно еднозначно изображение** между A и B), ако на всеки елемент $a \in A$ е съпоставен точно един елемент $b \in B$, означаван като $b=f(a)$, така че са изпълнени следните условия:

- за всяко $b \in B$ съществува $a \in A$, такава че $b=f(a)$;
- ако $a_1 \neq a_2$, то $f(a_1) \neq f(a_2)$;

Ако между две множества съществува биекция, то е ясно, че те имат равен брой елементи (тук се има предвид, че броят на елементите в множествата е краен – при безкрайните множества нещата изглеждат по-различно). **От тук нататък под биекция ще разбираме не само функцията, но и двете множества.**

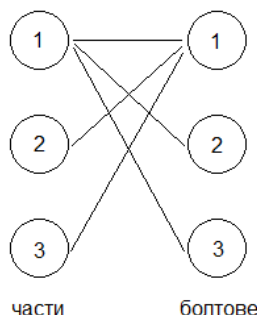
По време на ремонта на колата могат да се случат различни конфигурации от повреди, при които счупването на различни болтове води до повреждането на различни части.

Първо ще докажем, че всяка конфигурация от повреди представлява биекция между подмножеството от видовете счупени болтове и подмножеството от повредени части. По условие болт от всеки тип може да се счупи най-много веднъж, защото механиците се научават как да го завиват и не повтарят своята грешка. Също така всяка част може да се повреди най-много веднъж, защото след това използват услугата на специалист, който никога не греша. Следователно всяка възможна конфигурация от повреди представлява биекция между подмножества на частите и типовете болтове.

Сега ще докажем, че всяка биекция е възможна конфигурация от повреди. Нека разгледаме биекция f между подмножество S_B от видове болтове и подмножество S_P от части. Нека $f(b)=p$, където b е вид болт, а p е част. Тъй като f е биекция, знаем, че частта p няма да бъде повредена от нито един друг вид болт и болт от вид b няма да се е счупил в нито една друга част. Тъй като по условие всеки опит за завиване на болт може да бъде успешен, следва че е възможно b да се счупи точно когато се завива в p . Тъй като това е вярно за всички болтове в тази биекция, следва че съществува конфигурация, която съответства на нея.

Тъй като всяка конфигурация от повреди съответства на биекция и всяка биекция съответства на конфигурация, отговорът на задачата е равен на размера на най-големите подмножества от видове болтове и части, между които съществува биекция.

Сега нека разгледаме следния двуделен граф. Върховете съответстват на части (първи дял) и видове болтове (втори дял), а ребрата свързват частите с видовете болтове, необходими за монтирането им. Графът, съответстващ на примерния вход в условието, би изглеждал така:



Всяка биекция представлява matching в този граф.. Отговорът можем да намерим използвайки алгоритъма на Хопкрофт-Карп (частен случай на алгоритъма на Диниц за непретеглени двуделни графи). Това ни дава сложност от $O(\sqrt{N} * N * M)$.

Автори: Емил Ибришимов, Искрен Чернев