АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА

ЧИСЛОВ N-ЪГЪЛНИК

Можем да запишем обобщената формула за съкратено умножение, която се отнася за квадрата на сума, по следния начин:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 + 2 \times \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{(i+1) mod\, n} + 2 \times \sum_{\substack{i=2 \\ \forall j:(if\ i<n-1\ then\ 0\ else\ 1)\le j<i-1}}^{n-1} a_i a_j$$

Този запис ще прочетем така: квадратът от сумата на числата a_i се получава като към сумата от квадратите им добавим удвоената сума от произведенията на „съседните“ двойки и удвоената сума от произведенията на „несъседните“ двойки. Ако си представим числата записани по върховете на изпъкнал (например – правилен) n-ъгълник, а произведенията записани по свързващите ги отсечки, както е в задачата, удвоените суми се разчитат съответно като „…на числата по страните“ и „…на числата по диагоналите“. Т.е., нашата задача е да максимизираме последния член S на горното тъждество. Като се има предвид, че при зададени a_i квадратът от сумата Σ и сумата от квадратите σ са константи и ако означим сумата на числата по страните с S_1, то за търсената сума получаваме $S = \frac{1}{2}(\Sigma - \sigma - 2S_1)$, което превръща задачата в задача за минимизиране на S_1.

Това разглеждане ни носи най-малкото намаляване на сложността, тъй като броят на диагоналите е квадратичен по n (той е $\frac{n(n-3)}{2}$), а броят на страните е n. Освен това, обаче, има много прост $O(n.\log(n))$ алгоритъм за намиране на ***разположение*** на числата, което осъществява минималното S_1: сортираме числата a_i и, започвайки от двата края, разменяме сочените числа, като показалците прескачат през едно – левият надясно, а десният – наляво, докато се стигнат или разминат. Намирането на такова разположение позволява вече целият изчислителен процес да се осъществява по някакъв модул.

Последното нещо, което трябва да се съобрази, е модулът, по който да се работи при това изчисление. За да получим правилно последните p цифри на S, трябва да работим през цялото време по модул 2×10^p, защото от $2S \equiv t \pmod{m}$ при четно m следва $S \equiv \frac{t}{2}\left(mod\,\frac{m}{2}\right)$.

Авторът забеляза горния алгоритъм чрез „информатичен експеримент“ (което се очаква да направят и състезателите). Доказателството му дължим на ***Николай Белухов***:

Обща формулировка: Дадени са реалните числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Коя е тази пермутация $x_1, x_2, \ldots x_n$ на $a_1, a_2, \ldots a_n$, за която сумата $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$ е най-малка?

Решение: (1) За произволна пермутация $\pi = x_1, x_2, \ldots x_n$ на $a_1, a_2, \ldots a_n$, нека $S(\pi)$ е сумата $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$. Нека $\rho = b_1, b_2, \ldots b_n$ е търсената пермутация – тази, за която S е най-малко. Ще смятаме, че във всяка от разглежданите редици номерацията е циклична, тоест, че $a_{n+1} = a_1$, $b_{n+2} = b_2$ и т.н.

Нека a, b, c и d са реални числа. Ако $a < b$ и $c < d$ или $a > b$ и $c > d$, казваме, че двойките (a,b) и (c,d) са *еднопосочни* и пишем $(a,b);(c,d)$. Ако $a < b$ и $c > d$ или $a > b$ и $c < d$, казваме, че двойките (a,b) и (c,d) са *разнопосочни* и пишем $(a,b)\not;(c,d)$.

(2) Да допуснем, че има индекси i и j, такива, че двойките $(i,i+1)$ и $(j,j+1)$ са чужди (тоест, нямат общи елементи) и $(b_i,b_{j+1});(b_{i+1},b_j)$. Да разгледаме пермутацията

$$\pi = b_1, b_2, \ldots b_{i-1}, b_i, b_j, b_{j-1}, \ldots b_{i+2}, b_{i+1}, b_{j+1}, b_{j+2}, \ldots b_{n-1}, b_n$$

(блокът от b_{i+1} до b_j включително е обърнат). Имаме

$$S(\rho) - S(\pi) = b_ib_{i+1} + b_jb_{j+1} - b_ib_j - b_{i+1}b_{j+1} = (b_i - b_{j+1})(b_{i+1} - b_j) > 0,$$

което е противоречие.

И така, за всеки два индекса i и j, такива, че двойките $(i,i+1)$ и $(j,j+1)$ са чужди, имаме $(b_i,b_{j+1}) \nsim (b_{i+1},b_j)$.

(3) Нека n е нечетно.

Да допуснем, че за всяко i имаме $(b_i,b_{i+1}) \nsim (b_{i+1},b_{i+2})$. Нека, без загуба на общност, $b_1 < b_2$. За $i=1$ получаваме $b_2 > b_3$; за $i=2$ получаваме $b_3 < b_4$; ... за $i=n$ получаваме $b_1 > b_2$, което е противоречие.

Нека тогава, без загуба на общност, $b_1 < b_2 < b_3$. Последователно прилагане на (2) ни дава $b_n > b_3$, $b_1 > b_4$, $b_{n-1} < b_4$, $b_n < b_5$ и т.н. По този начин получаваме верижка от неравенства, която свързва всички b-та и, следователно, определя ρ еднозначно. Така например, за $n=7$ получаваме

$$b_6 < b_4 < b_1 < b_2 < b_3 < b_7 < b_5,$$

откъдето

$$b_6 = a_1, b_4 = a_2, \ldots b_5 = a_7.$$

(4) Нека n е четно, $n = 2k$.

Да допуснем, че за всяко i имаме $(b_i,b_{i+2}) \nsim (b_{i+1},b_{i+3})$. Нека, без загуба на общност, $b_1 < b_3$. За $i=1$ получаваме $b_2 > b_4$; за $i=2$ получаваме $b_3 < b_5$; ... за $i=n-2$ получаваме $b_{n-1} < b_1$. Но оттук $b_1 < b_3 < \ldots < b_{n-1} < b_1$, което е противоречие.

Нека тогава, без загуба на общност, $b_1 < b_3$ и $b_2 < b_4$. Последователно прилагане на (2) ни дава $b_n > b_4$, $b_1 > b_5$, $b_{n-1} < b_5$, $b_n < b_6$ и т.н. По този начин получаваме две независими верижки от неравенства, всяка от които свързва по k b-та.

Ако $b_2 > b_3$, то тези две верижки се свързват в една цяла чрез залепване на краищата при b_2 и b_3. Ако $b_2 < b_3$, то последователно прилагане на (2) ни дава $b_1 > b_4$, $b_n < b_5$ и т.н., докато определим как са наредени срещуположните краища на верижките – b_{k+2} и b_{k+3} – и се убедим, че тяхното залепване свързва двете верижки в една цяла и в този случай.

Оттук нататък, получената верижка определя ρ еднозначно, както в (3). Така например, за $n=8$ и $b_2 < b_3$ получаваме

$$b_2 < b_4 < b_8 < b_6 < b_7 < b_5 < b_1 < b_3,$$

откъдето

$$b_2 = a_1, b_4 = a_2, \ldots b_3 = a_8.$$

Автор: Павлин Пеев