АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА МЪНИСТА

Нека означим мънистата от различните цветове с числата от 1 до K. Имаме A1 мъниста от цвят 1 и т.н. Примери за огърлици с множество от цветове {1,1,2,2}: (1,2,1,2); (1,1,2,2).

Нека F(B1, B2, ..., BK) = (B1 + B2 + ... + BK)! / (B1! * B2! * ... * BK!) - броя на пермутации с повторения на B1 единици, B2 двойки и т.н.

Да разгледаме задачата, когато A1 = 1, A2 и A3 са нечетни. Можем да разрежем всяка огърлица през мънистото с цвят 1. Тогава свеждаме задачата до поставяне на останалите N-1 мъниста в последователност. Две поставяния на мъниста в последователност ще доведат до една и съща огърлица ако можем да получим едното от другото чрез обръщане. Например, редиците (2,2,3,2) и (2,3,2,2) ще доведат до една и съща огърлица. Общият брой на всички поставяния в редица е C = F(A2,A3,…,AK) – формулата за пермутации с повторения. Когато A2 и A3 са нечетни, всяка последователност ще има различна огледална последователност в бройката C. Отговорът на задачата е C / 2.

Ако нямаме гаранцията, че A2 и A3 са нечетни, възможно е някоя последователност да съвпада с отражението си. Например, редицата (2,3,2) е една и съща след обръщане. Това означава, че тя ще фигурира само веднъж в бройката C. Оказва се, че всички редици, които са симетрични ще фигурират по веднъж в C, а останалите – по два пъти. Нека D е броят на симетричните редици. Тогава отговорът на задачата е (D + C) / 2.

Смятането на D е лесно: ако имаме най-много едно нечетно число измежду {A2, A3, …, AK}, тогава ще има симетрични редици. D = F(A2/2, A3/2, …, AK/2 – използваме целочислено деление. Това е все едно да изберем първите (N-1)/2 числа на редицата и да ги дублираме огледално.

Да помислим в по-общия случай. Нека нарисуваме правилен N-ъгълник на лист хартия и да номерираме върховете му с числата от 1 до N. Сега да поставим огърлицата върху многоъгълника, така че всяко мънисто да съвпадне с връх на многоъгълника. Можем да кодираме огърлицата чрез N числа, показващи мънистата върху съответния номер връх на многоъгълника. Някои огърлици ще могат да бъдат представени чрез повече от едно кодиране (например, ако след завъртане, кодирането на огърлицата се промени).

Нека една огърлица е представена от кодирането (p1, p2, ..., pN). Тъй като всяка трансформация запазва целостта на огърлицата, числата p1, p2, ..., pN ще се срещат в този ред във всяко кодиране на тази огърлица. В друго кодиране на същата огърлица, нека числото p1 е на позиция i. Тогава p2 ще бъде на позиция i+1 или i-1 (работим по модул – N+1 = 1 ; 1-1 = N). За числото p3 ще има само една възможност: i+2 или i-2. Продължаваме по този начин. Имаме N варианта за поставяне на числото p1 и 2 варианта за поставяне на p2. Тоест, всяка огърлица ще съответства на най-много 2*N кодирания. Тези кодирания съответстват на N завъртания и N обръщания.

Можем да приложим идеята от случая A1 = 1. Нека се опитаме да броим по 2*N кодирания за всяка огърлица. Тези кодирания ще съответстват на различните завъртания и обръщания на една и съща огърлица.

Общият брой на всички различни кодирания е F(A1, A2, ..., AK). Но някои огърлици фигурират с по-малко от едно кодиране в този списък. Например, за N = 4, (1,2,1,2) ще присъства в списъка 2 пъти (като (1,2,1,2); (2,1,2,1)), а ние искаме да я преброим 2*N = 8 пъти. Пропуснатите кодирания се дължат на завъртания и обръщания на началната огърлица, които са ни довели до вече наблюдавано кодиране. Например, ако завъртим (p1, p2, p3, p4) = (1,2,1,2) на 180 градуса, ще получим същото кодиране: (p3, p4, p1, p2) = (1,2,1,2). Имаме и две обръщания на огърлицата: (p1, p4, p3, p2) = (1,2,1,2) ; (p3, p2, p1, p4) = (1,2,1,2). Аналогично, имаме 4 завъртания/обръщания, които ще доведат до кодирането (2,1,2,1) = (p2,p3,p4,p1) = (p4,p1,p2,p3) = (p2,p1,p4,p3) = (p4,p3,p2,p1).

Задачата ни се свежда до това да преброим колко кодирания са пропуснати, защото съвпадат със свое завъртане или обръщане (трансформация). Можем да фиксираме трансформацията и да видим колко кодирания сме пропуснали заради фиксираната трансформация. Тоест колко кодирания са еднакви на себе си след прилагането на трансформацията.

Случай 1: i-завъртане – това е завъртане, което праща (p1, p2, ..., pN) в (p(i+1), p(i+2), ..., p(i)). Щом двете кодирания са еднакви, p1 = p(i+1) ; p2 = p(i+2) ; ... ; p(N) = p(i+N) . p1 = p(i+1) = p(2i+1) = ... = p(1-i) ; p2 = p(i+2) = ... = p(2-i) ; ... Тоест, числата p1, p2, ..., p(g) ще определят напълно кодирането (p1, p2, ..., pN), където g=НОД(i, N). Бройката на кодиранията, които сме пропуснали заради i-завъртане е F(A1/d, A2/d, ..., AK/d), където d = N/g. Пропускаме кодирания заради i-завъртане само ако d дели всички A1, A2, ..., AK.

Случай 2: обръщане – когато N е нечетно всяко обръщане преминава през връх на многоъгълника. Тоест, всяко обръщане фиксира една позиция от кодирането. Например, (p1, p2, ..., pK) => (p1, pK, ..., p2). За да преброим кодиранията, е достатъчно да фиксираме числата p2, p3, ..., p(K/2). Останалите са равни на тях: p2 = pK ; p3 = p(K-1) ; ... Имаме N такива обръщания.

Когато N е четно имаме два вида обръщания: през два върха или през страна. Двата случая се разглеждат по подобен начин. От всеки вид обръщане имаме по N/2.

Отговорът на задачата е сумата от началните уникални кодирания, които преброихме и броят на кодиранията които сме пропуснали заради трансформация, расделена на (2*N).

Автор: Йордан Чапъров