АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ПОЛИЦИЯ

Да забележим, че всяка валидна размяна на местата на полицаите представлява пермутация на върховете, при която структурата на графа не се изменя. Тоест това е пермутация P, такава че върховете x, y са свързани с ребро тогава и само тогава когато върховете P(x), P(y) са свързани с ребро. Такава пермутация се нарича автоморфизъм.

Два графа се наричат изоморфни ако можем да получим от единия граф другия само чрез преномериране на върховете.

Имаме свързан неориентиран граф с N върха и N ребра => в графа има точно един цикъл. Нека върховете в цикъла са C1, C2, C3, …, Ck в реда на обхождане на цикъла (Ci и C(i+1) са свързани с ребро (1 <= i < k), както и Ck и C1). Ако премахнем ребрата от цикъла, ще останем с гора от **k** дървета. Нека тези дървета са T1, T2, …, Tk, с корени C1, C2, …, Ck. За всеки автоморфизъм P, върховете P(C1), P(C2), …, P(Ck) ще образуват цикъл в този ред.

Също така, да разгледаме функцията P(Ti) като преномериране на всички върхове в дървото Ti на база на пермутацията P.

Да видим какво се случва ако можем да разменим полицаите на кръстовища C1 и Ci. Тогава съществува автоморфизъм P, за който P(C1) = Ci.

C1, C2, …, Ck -> P(C1), P(C2), …, P(Ck)

Върховете P(C1), P(C2), …, P(Ck) са последователни върхове на цикъла. Имаме две възможности, отговарящи на двете посоки на обхождане на цикъла:

1) P(C1) = Ci, P(C2) = C(i+1), P(C3) = C(i+2), …

2) P(C1) = Ci, P(C2) = C(i-1), P(C3) = C(i-2), …

Тъй като графа запазва структурата си при прилагане на P, дърветата, съответстващи на върховете Cj и P(Cj) са изоморфни за всяко 1 <= j <= k. Това са дърветата Tj и T(P(Cj)).

В частност, T1 и Ti са изоморфни. Тоест, всеки полицай от Ti може да бъде разменен с полицай от T1, заради пермутацията P. Тоест, когато броим множествата взаимо-заменяеми полицаи, е достатъчно да преброим множествата полицаи само в T1.

Това наблюдение ни води до следния алгоритъм:

1. Намираме върховете в цикъла.

2. Разбиваме върховете в цикъла на множества взаимо-заменяеми полицаи.

3. Избираме представител на всяко множество полицаи от цикъла. Нека тези представители са A1, A2, …, Al

4. Намираме броя на множествата взаимо-заменяеми полицаи във всяко от кореновите дървета T(A1), T(A2), …, T(Al).

За да може да определим дали два върха от цикъла са взаимо-заменяеми, трябва да можем бързо да сравняваме две коренови дървета Ti, Tj за изоморфизъм. Това може да се постигне чрез хеширане на дърветата.

Да разгледаме ефективен алгоритъм за хеширане на коренови дървета. Основната идея е да тръгнем от листата към корена, и да хешираме поддърветата с корен във всеки връх. Ще можем да дадем хеш-стойност на поддървото с корен върха v, след като сме хеширали поддърветата, съответстващи на синовете му.

Като започваме, даваме хеш-стойност 1 на листата. След това, намираме връх v, за който сме изчислили хеш-стойностите на децата. Даваме една и съща хеш-стойност на върха v и на всички върхове, които имат деца със същите хеш-стойности като децата на v. Така получаваме идеална хеш-функция без колизии, и всяко поддърво ще има хеш-стойност по-малка или равна на N.

За да направим бърза имплементация на описания алгоритъм, може да използваме trie, в което ребрата отговарят на хеш-стойностите на поддърветата. Всеки от върховете на началното дърво се намира във връх на trie. Когато изчислим хеш-стойността на син на даден връх, може да го преместим по съответното ребро на trie. Когато дълбочината на върха в trie, стане равна на броя синове в началното дърво сме готови да изчислим хеш-стойността на върха.

Но това хеширане не е достатъчно. За да проверим дали два върха от цикъла са взаимо-заменяеми, тогава трябва да сравним хеш-стойностите на всички върхове от цикъла, започвайки от върховете които тестваме. Тази проверка също може да бъде направена бързо чрез стандартно полиномиално хеширане.

Като имаме представителите на всички множества от цикъла, можем да слезем и да решим задачата за всяко необходимо дърво. Два върха от едно кореново дърво принадлежат са взаимо-заменяеми ако родителите на двата върха за взаимо-заменяеми, а съответните им под-дървета са изоморфни. Това може да се докаже индуктивно от дефиницията за автоморфизъм.

Вече сме готови да създадем прост алгоритъм за броене на множествата взаимо-заменяеми върхове в кореново дърво. Започваме да обхождаме дървото от корена. От текущия връх на обхождането, слизаме само в “различните” синове. Няма смисъл да обходим два сина с изоморфни поддървета - всеки връх от едното поддърво, има съответстващ връх в другото. Накрая, броят на множествата в цялото дърво е равен на броя на посетените от обхождането върхове.

Автори: Румен Христов, Йордан Чапъров