АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ВЛАК

Да представим мрежата от задачата с краен неориентиран граф $G(V,E)$, в който ребра E са релсовите трасета, а точките на съчленяване са върховете V. Според условието на задачата, G няма примки и многократни ребра. В графови термини, влакът от задачата представлява прост (т.е. непресичащ се) път $S = x_0, x_1,\ldots, x_T = F$, $S \neq F$. Графите, които съответстват на описанието, т.е. в които всяко ребро участва в не повече от един цикъл, се наричат *кактуси*. Ще представим тук решението на задачата в най-общия вид (Подзадача 3).

Ребрата на кактус, които участват в цикъл наричаме *циклични,* а тези които не участват в цикъл – *линейни.* Забележете, че кактусите са дървоподобни графи – ако заменим всеки цикъл на кактуса с връх ще получим дърво. Ще използваме три операции, които разбиват зададен кактус на *подкактуси* (вж. Фиг. 1):

А) *премахване на цикъл c, означаваме с G-c*: премахваме ребрата на цикъла, като всеки от получените подграфи наричаме *съставящ* – u_1-съставящ, u_2- съставящ,..., $u_к$- съставящ;

В) *премахване на линейно ребро* (u, v), означаваме с $G - (u,v)$ – всеки от двата отделили се подграфа наричаме *фрагменти* – *u*-фрагмент и *v*-фрагмент.

Да означим най-късия път от v до w в графа с $d(v,w)$.

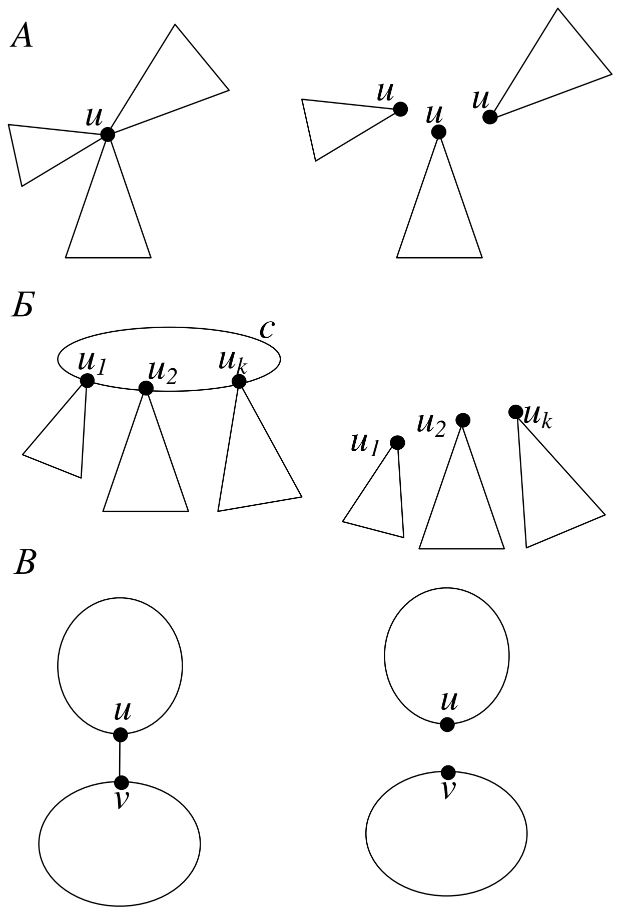
Случай 0. Тук има два тривиални подслучая

0.1. Ако $S = F$, тогава минималната дължина е 0.

0.2. Ако $T = 0$ тогава търсената минимална дължина е $d(S,F)$.

Да разгледаме реброто $(S=x_0,x_1)$, върху което е стъпил локомотивът. То може да бъде или линейно или циклично.

Случай 1. (x_0,x_1) е линейно ребро. Тогава за F има две възможности – да принадлежи на x_0-фрагмента на $G - (S,x_0)$ или да принадлежи на x_1-фрагмента.



Фиг. 1

1.1. Ако F принадлежи на x_0-фрагмента, тогава задачата се редуцира до намиране на **най-къс път от x_0=S до F** в зададения граф и търсеното минимално разстояние е $d(S,F)$.

1.2. Ако F принадлежи на x_1-фрагмента, тогава влакът трябва да се опита да обърне посоката на движение в x_1-фрагмента, ако това е възможно, като се върне с начало в S. Такъв *v*-фрагмент φ, в който влакът може да влезе през v, да се „обърне“ и излезе през v наричаме *обръщало.* Да означим с $turn(\varphi,v)$ дължината на най-късия път, по който влакът се обръща в φ, влизайки през v. Ако обръщането е невъзможно, ще смятаме, че стойността на $turn(\varphi,v)$ е безкрайност. В този случай търсеното минимално разстояние е $turn(\varphi_S,S) + d(S,F)$, съдето с C_S сме означили S-съставящия получен с премахване на линейното ребро (S, u_1).

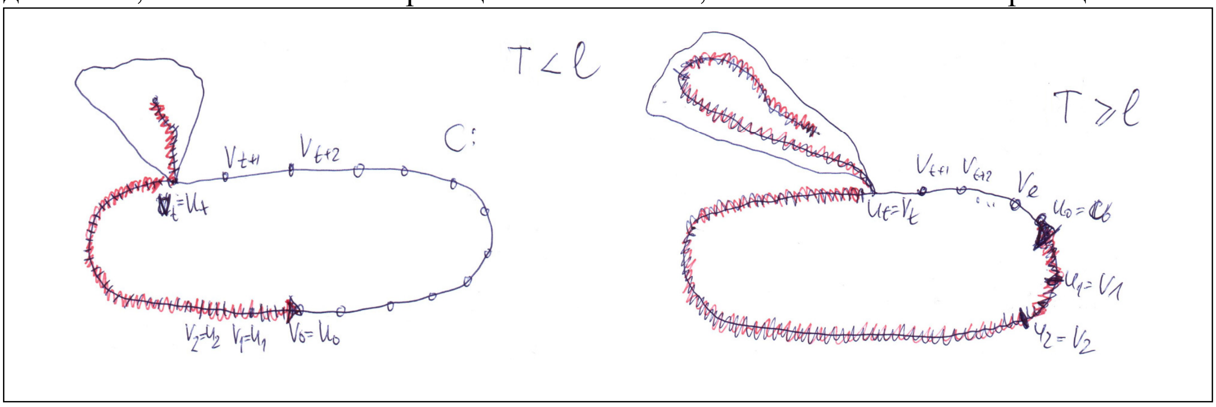
Как да пресметнем $turn(\varphi,v)$. Да отбележим първо, че не е възможно влакът да „обърне посоката“ и да се върне във v по друг начин, освен във вътрешността на един цикъл, като влиза в него и излиза през един и същ връх. Затова, да означим с $d(v,c)$ минималното разстояние от v до някой от върховете на цикъла c, а с $d(c)$ – дължината на цикъла c. Тогава $turn(\varphi,v) = \min_{c\in\varphi}\{2.d(v,c)+d(c)\}$.

Случай 2. (S, u_1) е ребро от цикъла $L= (v_0 = x_0 = S, v_1 = x_1,\ldots,v_t = x_t, v_{t+1},\ldots, v_l=v_0)$ с дължина l и u_t е последният връх от влака, който е върху цикъла, $t \le T$ и $t < l$. Нека C_i е v_i-съставящ получен при отделянето на L. Да означим с $D(i,j)$ разстоянието от v_i до v_j в посоката, в която е застанал влака в началото, а с $D'(i,j)$ разстоянието от v_i до v_j в обратната посока, $D(i,j) + D'(i,j) = l$. В този случай има две принципни възможности за придвижване на влака до F:

а) влакът върви напред, достига до C_i, която съдържа F, ако може, и влиза в него. Тогава изминатият път е точно $D(0,i)+d(v_i,F)$;

б) движейки се напред влакът намира обръщало, например C_j, обръща се там, движи се в обратна посока, стига до C_i, който съдържа F и влиза в него. Тогава изминатият път е $D(0,j)+turn(C_j,v_j)+D'(j,i)+d(v_i,F)$

Тези две принципни възможности имат специфично приложение в зависимост от това, дали $T < l$, т.е. влакът се побира в цикъла или $T \ge l$, т.е. влакът не се побира в цикъла.



2.1. $T < l$, т.е. влакът се побира в цикъла. В този случай съставящият C_i, който съдържа F, винаги може да се достигне при движение на влака напред с $D(0,i)+d(v_i,F)$ стъпки. В същото време, възможно е да опита и всеки връх преди v_i като обръщало и да се стигне до v_i в обратната посока. Тогава търсеният минимум ще бъде

$$\min \{D(0,i)+d(v_i,F)\}\cup\{ D(0,j)+turn(C_j,v_j)+D'(j,i)+d(v_i,F) \mid j = l-1, l-2,\ldots,i+1 \}.$$

2.2. $T \ge l$, т.е. влакът не се побира в цикъла. Тогава е важно дали входът v_i на съставящия C_i, който съдържа F, е покрит от влака или не:

2.2.1. Ако v_i не е покрит от влака, тогава търсеният минимум се пресмята както в **2.1.**

2.2.2. Ако v_i е покрит от влака, тогава достъп при движение в права посока е невъзможен и остава само възможността с обръщане през някой образуващ преди v_t. В такъв случай търсеният минимум е

$$\min \{ D(0,j)+turn(C_j,v_j)+D'(j,i)+d(v_i,F) \mid j = l-1, l-2,\ldots,t+1 \}.$$

Да отбележим че свързан кактус с n върха може да има максимум $\lfloor N/3\rfloor$ цикъла. Тъй като, след построяване на покриващо дърво на кактуса, от всеки цикъл се маха точно 1 ребро, то броят M на ребрата на кактуса е $\le (N - 1) + \lfloor N/3\rfloor = O(N)$. От тук и линейната сложност на този алгоритъм.

Автори: Кр. Манев, М. Марков