АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
Ants

Задачата Ants е пример за задача, която е много по-трудна за измисляне, отколкото за написване. Като цяло задачи с вероятности (в случая очакване) често се решават или с математическа формула, или с динамично оптимиране. Тази не е изключение, като от участниците не се очакваше да знаят никаква сложна математика и теория на вероятностите – съществува лесно динамично решение.

Основният проблем както при всяко динамично е как да представим state-а с достатъчно малко памет. Малките ограничения (до 10) помагат много за 50% от тестовете (където има само един ред).

Първото наблюдение, което трябва да направим е, какво става, когато няколко мравки попаднат в една и съща клетка. Нека този брой е X. Какво прави формулата X^{X+1} % 8? Ако X е било 0, то си остава 0. Ако е било 1, то си остава 1. Ако е било 2 става 2^3 % 8 = 0. Ако е било 3, то 3^4 % 8 = 1. Ако е било 4, то 4^5 % 8 = 0. Тоест тази формула е еквивалентна на сбора на мравките по модул 2. Така във всяка клетка по всяко време има най-много една мравка.

Голяма част от състезателите ще се сетят за възможно динамично по брой останали клетки и битова маска на кои от тях има мравки. Тъй като всяко разположение е равно-вероятно, то трябва да се пробват всички възможни първоначални разположения на мравките (252 на брой в най-лошия случай на 10 клетки и 5 мравки). За всяко от тях трябва да се ползва динамичното и да се изчисли очаквания брой накрая. Всъщност при двумерна таблица, която пази колко останали (неотровени) клетки има и каква е битовата маска на мравките, стойностите на таблицата не е нужно да се инвалидират между различните начални разположения. Тоест сложността на това решение е O(M * 2^K). Сравнително лесно за имплементиране, за съжаление това решение работи за едва 50% от тестовете. Когато дъската стане двумерна (а не едномерна, както е в случая) това решение вече не работи.

За да решим задачата за 100 точки трябва да направим следните две наблюдения (които до голяма степен са свързани помежду си). Нека разделим клетките на дъската на „четни“ и „нечетни“, където четни са тези клетки, чиито (row + column) mod 2 == 0, а нечетни са тези, чиито (row + column) mod 2 == 1. Тоест представяме терариума като шахматна дъска, където различно-оцветените клетки имат различна четност. Забелязваме, че всяка четна клетка има само нечетни съседи, и обратно – всяка нечетна клетка има само четни съседи. Тъй като мравките се движат всяка минута, то тези на четните позиции отиват на нечетни и обратно. Така една мравка, която в началото на играта е била на нечетна позиция, НИКОГА не може да се сбие с мравка, която в началото е била на четна.

Второто наблюдение е, че от дадения в задачата начин на елиминиране на редове и колони накрая остават точно две клетки, които са една до друга. Това, че са една до друга означава, че едната е четна, а другата нечетна (независимо къде по първоначалната дъска са те). И тъй като както четните, така и нечетните мравки се бият само помежду си, стигаме до извода, че от четните ще е останала максимум една мравка на едната от тези две клетки, а от нечетните ще е останала максимум една мравка на другата. И тъй като, както казахме, винаги взимаме сбора на мравките по модул две, ако сумарно на нечетните позиции е имало четен брой мравки, то накрая са останали нула такива, а ако са били нечетен брой е останала една. Същото важи и за тези на четните позиции.

Вече имаме решение, което линейно може да определи по зададена начална дъска (знаейки къде са мравките) колко точно мравки ще оцелеят накрая. Забележете, че напълно игнорираме реда на махане на редове и колони, както и не обръщаме внимание на това, че движението на мравките е на случаен принцип. Горните наблюдения ни дават право да твърдим, че намираме не очакването на броя мравки, а сигурния брой мравки. Единственият проблем е, че не знаем първоначално как са разположени мравките. Тук влиза в употреба динамичното оптимиране. State-ът в опростената задача е значително по-лесен. Интересува ни:

- Колко клетки ни остават от дъската (в началото N * M)
- Колко мравки ни остава да сложим (в началото K)
- Каква е четността на досега сложените мравки на четни клетки
- Каква е четността на досега сложените мравки на нечетни клетки

Така стигаме до динамично с таблица (101)(11)(2)(2). Тъй като съседни клетки са с различна четност, по броя оставащи клетки можем да определим четността на текущата клетка (която ни трябва ако решим да слагаме мравка) ако обхождаме дъската, например, по спирала. Единствената математика в задачата е въпросът ако имаме R оставащи клетки и K оставащи мравки, то каква е вероятността на текущата клетка да има мравка? Логичният отговор е K / R. Тук състезателите трябва да внимават да не разглеждат позиции, за които вероятността е нула (тоест K е станало повече от R).
Всяко от състоянията се изчислява константно, така че сложността както по време, така и по памет е O(N * M * K). Реално задачата би била решима и с много по-големи ограничения, но счетох, че ниските такива биха могли да заблудят някои от добрите състезатели и да помогнат на някои от по-неопитните.

Има и някои неща, които можем да забележим опитно и биха ни помогнали да направим горните наблюдения:
Някои от състезателите може би биха си написали симулация (бавно решение) за малки примери. Така те биха могли да видят, че ако броят мравки е нечетен, то отговорът е винаги 1.000000. Това би им помогнало да направят горните наблюдения. Ако не ги направят, обаче, за тяхно съжаление има само 2 теста (от 20) с нечетно K, така че това не би им дало голямо предимство.

Имаше възможност задачата да се даде с изискване отговорът да се изкарва с точност 3 знака (вместо 6) след десетичната точка. В такъв случай можеше с offline калкулация да се изчислят отговорите за всеки възможен вход чрез симулация (тъй като възможните входове не са никак много). С 6 знака след десетичната точка, обаче, това решение е почти невъзможно.

Автор: Александър Георгиев