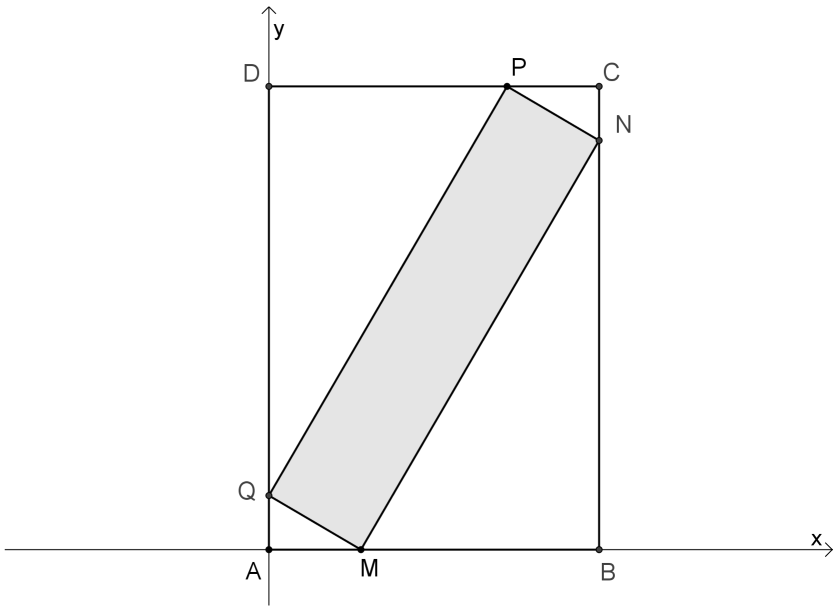
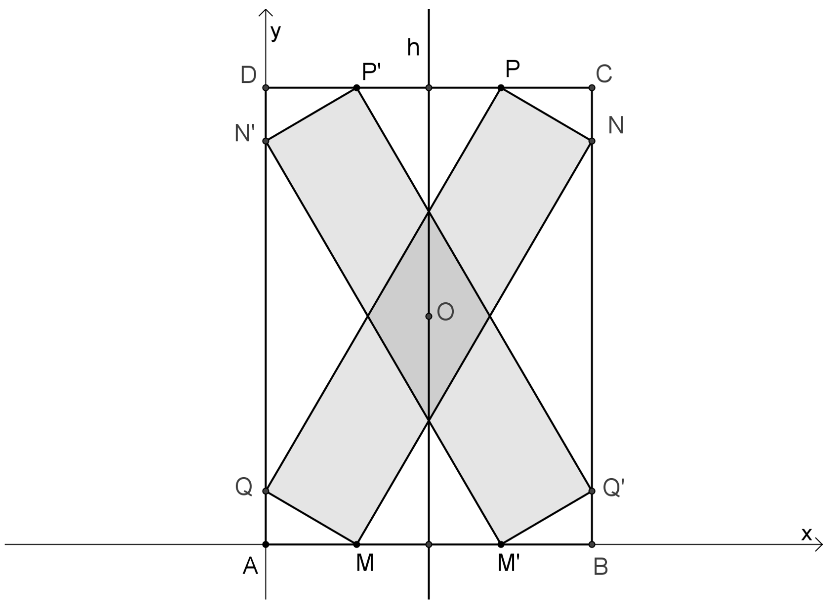
# АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ПРАВОЪГЪЛНИЦИ

Без ограничение може да считаме, че $m \le n$, защото ако разменим местата на $m$ и $n$ в условието на задачата, отговорът няма да се промени.

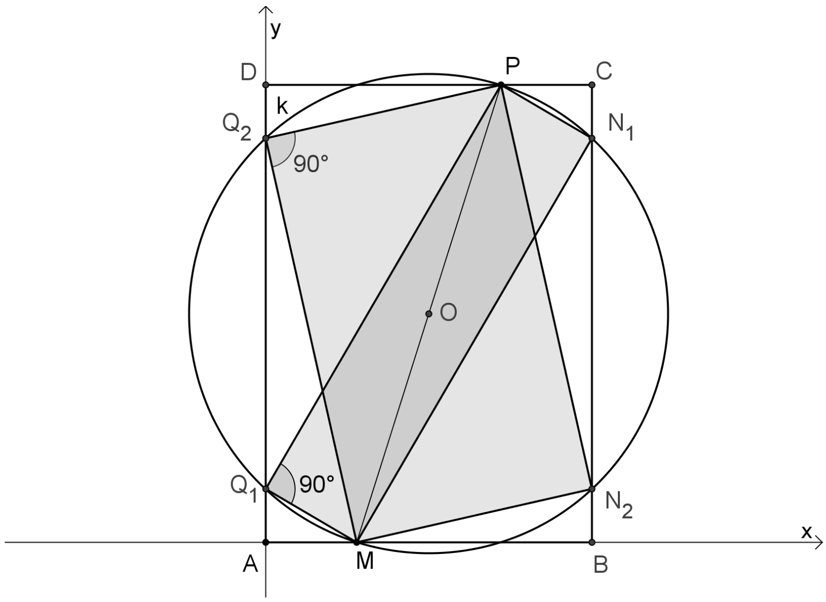
Нека вписаният правоъгълник е $MNPQ$ ($M \in AB,\ N \in BC,\ P \in CD,\ Q \in AD$).




Лесно се съобразява, че $AM = CP,\ MB = PD,\ BN = DQ$ и $AQ = NC$. Освен това, тъй като $ABCD$ е симетричен спрямо правата $h$, може да считаме, че $AM \le MB$.




Ще покажем, че точка $M$ е достатъчна за определянето на целия правоъгълник $MNPQ$. Означаваме с $O$ центъра на правоъгълника. Нека точка $M \in AB$. От описаното преди малко следва, че без ограничение може да считаме, че $0 < AM \le \frac{m}{2}$. Очевидно точка $P$ е симетрична на $M$ спрямо $O$. От друга страна, тъй като $\sphericalangle MQP = 90°$, то точка $Q$ лежи на геометричното място от точки, от които отсечката $MP$ се вижда под ъгъл $90°$. Следователно точка $Q$ лежи на окръжност с център $O$ и радиус $OM$. Тази окръжност винаги пресича отсечката $AD$ в две точки (изключение прави само случая, когато $m = n$ и точка $M$ е среда на отсечката $AB$ – тогава окръжността се допира до $AD$ и има с нея една обща точка). След определянето на двете възможности за точка $Q$ лесно се виждат и съответните им възможности за точка $N$.




Накратко: за всеки избор на точката $M$ има две възможности за вписване в $ABCD$ на правоъгълник, единият връх на който е точката $M$ – $MN_1PQ_1$ и $MN_2PQ_2$ (с изключение на описания по-горе случай – тогава двата правоъгълника съвпадат).

Сега аналитично ще опишем тези геометрични разсъждения.

Нека $AM = t$, $t \in \left(0, \dfrac{m}{2}\right]$. Следователно $M(t, 0)$. Ясно е, че ако координатите на точка $M$ са целочислени, то целочислени са и координатите на точка $P$. Също така координатите на точките $Q_1$, $Q_2$, $N_1$ и $N_2$ едновременно са целочислени или не са такива. Следователно, за да преброим търсените в задачата правоъгълници, е достатъчно да определим за кои цели стойности на $t \in \left(0, \dfrac{m}{2}\right]$ ординатата на точка $Q_1$ ще бъде цяло число. Намирането на тази ордината може да стане по различни начини. Например:

- чрез използване на подобни триъгълници;
- чрез използване на скаларно произведение на вектори;
- чрез използване на аналитична геометрия.

Тук ще се спрем на третия начин. Уравнението на окръжността $k$ е

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \left(t - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

За определяне на координатите на точките $Q_1$ и $Q_2$ трябва да се намерят пресечните точки на $k$ и правата $AD$, която има уравнение $x = 0$, т. е. трябва да се реши системата:

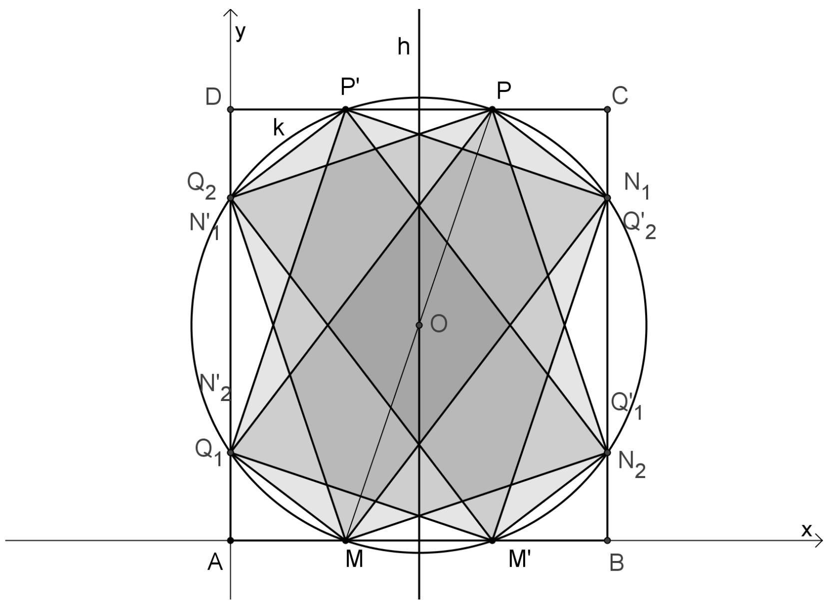
$$\begin{cases}\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{n}{2}\right)^2=\left(t-\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2\\ x=0\end{cases}$$

След преобразуване за ординатите на двете точки получаваме, че са решение на уравнението $y^2-yn-t^2+tm=0$.

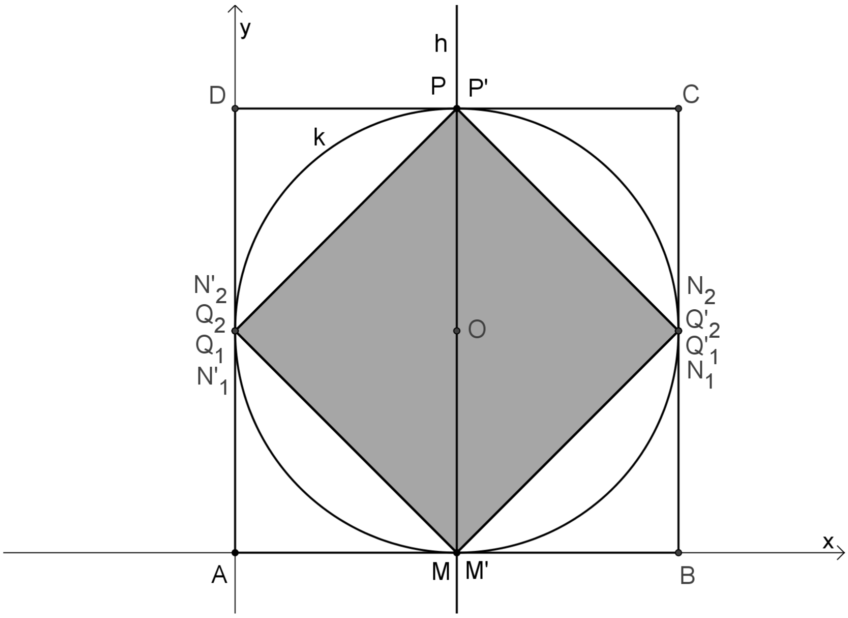
Следователно $Q_1\left(0,\frac{n-\sqrt{n^2+4t^2-4mt}}{2}\right)$ и $Q_1\left(0,\frac{n+\sqrt{n^2+4t^2-4mt}}{2}\right)$. Сега трябва да се провери дали стойността на израза $\frac{n-\sqrt{n^2+4t^2-4mt}}{2}$ е цяло число. Това може да направим като пресметнем цялата част на този израз и проверим дали $\left\lfloor\frac{n-\sqrt{n^2+4t^2-4mt}}{2}\right\rfloor$ е решение на уравнението $y^2-yn-t^2+tm=0$ (неизвестното е $y$, проверката извършваме чрез заместване).

Накрая трябва да съобразим по колко правоъгълника трябва да броим, ако за някое цяло $t\in\left(0,\frac{m}{2}\right]$ сме получили, че числото $\frac{n-\sqrt{n^2+4t^2-4mt}}{2}$ е цяло:

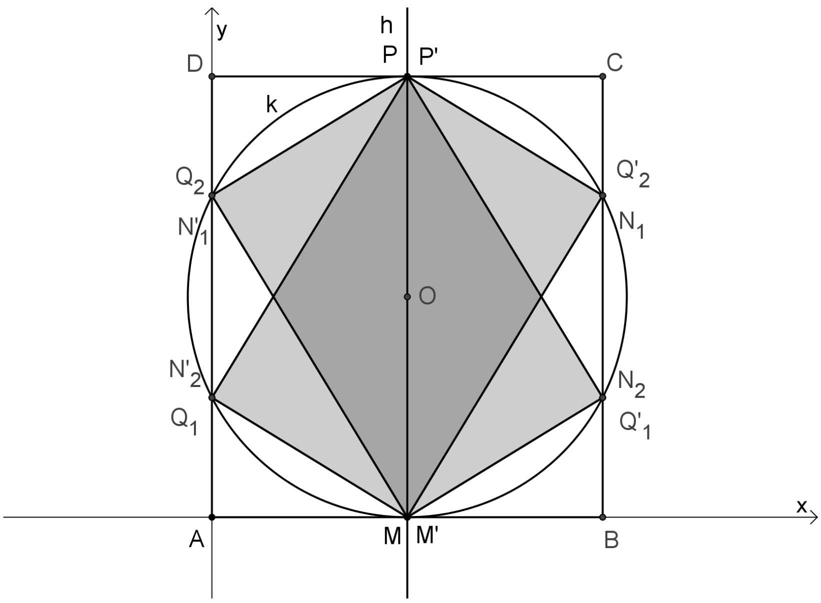
- ако при $t<\frac{m}{2}$ сме получили решение, то на него съответстват 4 правоъгълника;




- ако при $t=\frac{m}{2}$ и $m=n$ сме получили решение, то на това решение съответства само 1 правоъгълник (квадрат);




- ако при $t = \dfrac{m}{2}$ и $m \neq n$ сме получили решение, то на това решение съответстват 2 правоъгълника.




*Автор: Младен Манев*