АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
БАЛАНСИРАНИ ЧИСЛА

Дефинираме функцията $st(a)$ по следният начин:

За всяко цяло положително число $a, st(a) = s$, където s се представя по следния начин в троична бройна система: $s = \overline{s_9 s_8 \dots s_0}_{(3)}$ (може и да съдържа водещи нули), и за $0 \le d \le 9$:

- *$s_d = 0$, ако a не съдържа цифрата d в десетичния си запис;*
- *$s_d = 1$, ако цифрата d се среща нечетен брой пъти в десетичния запис на a;*
- *$s_d = 2$, ако цифрата d се среща четен брой пъти в десетичния запис на a;*

Така зададената функция разделя целите положителни числа на 3^{10} класа. Ясно е, че можем да определим дали едно число a е балансирано само по стойността на $st(a)$.

Нека a е цяло положително число и $s = st(a)$. Нека $b = 10a + r$ е число, получено от a, чрез добавяне отдясно на цифрата r. Дефинираме функцията $ex(s, r) = st(b)$. Лесно се вижда, че дефиницията е коректна.

Да разгледаме задачата за намиране на $bal(n)$ – броя на балансираните числа в интервала $[1, n)$.

Нека $g(n, s)$ е броят на числата $a, 1 \le a < n$, за които $st(a) = s$. Тогава можем да намерим $bal(n)$ като сумираме $g(n, s)$ по всички състояния s, на които съответстват балансирани числа.

Можем да използваме динамичен подход за намирането на $g(n, s)$. Нека $n = 10m + r$, където $m > 0$ и $0 \le r \le 9$ и сме пресметнали $g(m, s)$ за всяко $s < 3^{10}$. Тогава:

- *Всяко число $1 \le a < m$ може да се разшири с произволна цифра d отдясно.*
- *Числото m може да се разшири с цифра $d < r$ отдясно.*
  Така получаваме всички многоцифрени числа по-малки от n.
- *Числата $1, 2, \dots 9$ са всички едноцифрени по-малки от n.*

Така получаваме следният алгоритъм за намиране на $g(n, s)$:

1. За всяко $s, 0 \le s < 3^{10}$: $g(n, s) := 0$;
2. За всяко $d, 0 \le d < r$: $g\big(n, st(d)\big) += 1$;
3. За всяко s и всяко d: $g\big(n, ex(s, d)\big) += g(m, s)$.

Оригиналната задача решаваме, като намерим разликата $bal(b + 1) - bal(a)$.

Описаният алгоритъм има сложност от порядъка на $O(c. 10.3^{10}. d)$, където d е броят на цифрите на n.

Автор: Красимир Георгиев