

Доказателство за съществуване и единственост на функциите + алгоритъм за строене (формално доказан):

Строим функционалните стойности по индукция. Нека в даден момент знаем всички $f(x)$ за x не по-голямо от дадено i , също знаем всички $g(x)$ за $x \leq j$.

Базата е $f(1) = 1, g(1) = 2, f(2) = 3$ (тривиална проверка). Базови $i=2, j=1$. За всяка ситуация (i,j) имаме $i \leq f(j)$. Също така имаме изпълнено $f(i) > g(j)$ (т.е. ще си строим така индукцията, че последното винаги да е вярно).

Освен това като следствие на строгата монотонност на функциите следват директно неравенствата $f(x) > x$ (при $x > 1$) и $g(x) > x$ за всяко x . Лесно се забелязва свойството $f(x+1) \geq f(x) + 1$. Откъдето имаме $g(x+1) = f(f(x+1)) + 1 \geq f(f(x) + 1) + 1 \geq f(f(x)) + 2 \geq g(x) + 1$. Сега допускаме, че сме построили решението на задачата до някаква двойка числа (i, j) . За да сметнем $g(j+1)$ на нас ни трябва да знаем на колко е равно $f(f(j+1))$. Сега разглеждаме 2 случая:

* 1 сл.: Ако $i = f(j+1)$ то ние можем да намерим $g(j+1) = f(f(j+1)) + 1 = f(i) + 1$. И освен това имаме, че $g(j+2) = f(f(j+2)) + 1 \geq f(f(j+1) + 1) + 1 = f(i+1) + 1$. Но тъй като $g(j+2) \neq f(i+1)$ следва, че $g(j+2) > f(i+1) + 1 \geq f(i) + 2$. Но стойността $f(i) + 2$, трябва да се получава като стойност на някоя от функциите; следователно $f(i+1) = f(i) + 2$. Така построяваме решение за двойката $(i+1, j+1)$, директна проверка показва равенството $i+1 \leq f(j+2)$, както и $f(i+1) > g(j+1)$.

* 2 сл.: $i < f(j+1)$, от тук следва, че $f(i) < f(f(j+1)) = g(j+1) - 1$, или все едно $f(i) + 1 < g(j+1)$. Но тъй като $f(i) > g(j)$, то стойността $f(i) + 1$ е функционална стойност на $f(x)$ и следователно имаме $f(i+1) = f(i) + 1$. При това за двойката числа $(i+1, j)$ са изпълнени свойствата $i+1 \leq f(j)$, както и $f(i+1) > g(j)$. (проверяват се директно).

Показаната индукция строи две функции $f(x)$ и $g(x)$ отговарящи на условието на задачата (което мисля, че би трябвало да докаже както съществуването така и единствеността на тези функции). Все пак тръгваме от лесно проверима база и докато са изпълнени условията на индукцията строим функционални стойности. При случай 2 се увеличава само стойността на i , но тя може да се изпълни само краен брой пъти преди стойността на i да стане равна на $f(j+1)$, и тогава ще се увеличи и стойността на j .

Сега нека на всяка стъпка от индукцията да разгледаме наредената четворка $(i, j, f(i), g(j))$, която получаваме. В базата на индукцията $(2, 1, 3, 2)$, имаме изпълнено свойството: $i+j = f(i)$. Лесно се вижда, че от първия случай на индукцията от $(i, j, f(i), g(j))$ се достига до $(i+1, j+1, f(i)+2, f(i)+1)$, където то отново е изпълнено, а от случай 2 се достига до $(i+1, j, f(i)+1, g(j))$, където отново е изпълнено. Следователно за всяка стъпка на индукцията имаме $i+j=f(i)$. Нека сега разгледаме всички стъпки на индукцията, при които $i=f(j+1)$. За тях също е изпълнено $f(i)=i+j$ или $f(f(j+1))=f(j+1)+j$, или

все едно $g(j+1)-1=f(j+1)+j$ или $g(j+1)=f(j+1)+j+1$. Кое е изпълнено при всяко $j \geq 1$. Или все едно $g(j)=f(j)+j$, за всяко $j \geq 1$ (за $j=1$ се проверява директно).

Последното е много дълбок извод, който е и очевиден, ако човек гледа редиците. Още в примерния тест се вижда, че $g(x) - f(x) = x$. Кое допълнително улеснява задачата ни.

Другия очевиден резултат от индукцията е, че $f(x)$ се увеличава най-много с 2 на всяка стъпка и поне с единица, или имаме $x < f(x) < 2 \cdot x$.

Сега бихме искали да стесним тази граница. Т.е. ще докажем, че $f(x)$ е линейна функция, в следния смисъл: когато оставим x да клони към безкрайност, $f(x)/x = C$ (константа между 1 и 2).

Линеиността се доказва по-скоро интуитивно:

1. И двете функции са поне линейни, заради изискването за строгото им нарастване, и от това, че са естествени.
2. От какъвто "тип" е $f(x)$, от такъв е и $g(x)$. Т.е. ако $f(x)$ е квадратна, то и $g(x)$ е квадратна. Това е заради $g(x) = f(x) + x$. Т.е. ако $f(x)$ е със степен по-голяма от единица, то асимптотично тази степен "преборва" самотното x и $g(x)$ е със същата степен като $f(x)$.
3. Заради условие (3) (за всяко z от $\mathbb{N}$ има x , такова, че или $f(x) = z$ или $g(x) = z$) трябва да не са повече от линейни, инак се появяват "дупки" в покритието на множеството на естествените числа (това не знам как да го кажа математически).

Иначе казано, от цялото множество $\mathbb{N}$, определена част го "покрива" $f(x)$, останалата част го покрива $g(x)$. "Частта" на $f(x)$ е точно единица върху Златното Сечение, което човек може да открие чисто статистически.

Оттук до формулата $f(x) = \text{floor}(x \cdot \text{Златното Сечение})$ може да се стигне по следния начин. (Като за да са вярни нататъчните разсъждения, оставяме x да клони към безкрайност)::

$$(*) f(x)/x = C$$

$$1 < C$$

добавяме единица от двете страни на (*):

$$[f(x)+x]/x = C+1$$

заместваме $f(x)+x$ с $g(x)$:

$$g(x)/x = C+1$$

делим на (*):

$$(**) \ g(x)/f(x) = (C+1)/C$$

Нека разпишем $g(x)/f(x)$:

$$g(x)/f(x) = [f(f(x))+1]/f(x) = f(f(x))/f(x) + 1/f(x)$$

Припомняме си , че x клони към безкрайност $\Rightarrow 1/f(x)$ клони към 0.

Позовавайки се на линейността на $f(x) \Rightarrow$

$$f(f(x))/f(x) = f(x)/x = (\text{от } (*)) = C$$

Комбинираме (*) и (**):

$$C = (C+1)/C \Rightarrow C \text{ е Златното Сечение.}$$

Това е вярно за x клонящо към безкрайност, но може опитно да се провери, че $f(x) = \text{floor}(x * \text{Златното Сечение})$ за всяко x . Аз като информатик съм склонен да вярвам на формулата, тъй като не се дъни никъде на първите милиард члена :)

Това е решението. Знаем, че е излишно сложно и сигурно ако се пообмисли може да стане и на 5 реда.