Анализ

Това е трудна задача, макар реализацията на решението да е сравнително лесна.

Всички решения разглеждат тестовете в един входен файл поотделно, и съответно обозначените сложности са за един тест.

При L > B е очевидно, че Лора печели играта. Решенията в този анализ приемат, че L ≤ B.

Подзадача 1

В тази подзадача е достатъчно всякакво пълно изчерпване. Единствената трудност е, че технически играта може да продължи вечно. Това може да се игнорира като се приеме, че игра с твърде много ходове е равенство (в следващите подзадачи ще стане ясно, че това е наистина така)

Подзадачата позволява и hardcode-ване на отговорите.

Подзадача 2 – $O(N^4)$

Стандартно за такъв тип задача е да се опитаме да дефинираме печеливши, губещи и равни позиции. Логиката не е много по-различна от дефиниране на печеливши и губещи позиции. Формално:

- Позиция е печеливша за играча на ход ако той има ход, който пренася играта в позиция губеща за другия играч
- Позиция е губеща за играча на ход ако всеки ход, който може да направи, пренася играта в позиция печеливша за другия играч
- Позиция е равенство ако не е нито печеливша нито губеща

Тези дефиниции работят добре за нециклична игра, затова трябва да представим дадената ни игра като крайна. Представените решения се справят с този проблем по различни начини.

Нека дефинираме позиция в играта. В случая Лора и Боби не играят по идентични правила и затова трябва да пазим информация и за двамата. Можем да опишем една позиция чрез следната информация:

- Позиция на Лора
- Позиция на Боби
- Играч на ход

Така стейтът е с големина $O(N^2 * 2) = O(N^2)$. Проблем е обаче цикличността – възможно е след няколко хода от дадена позиция да се върнем отново в нея. Едно решение на проблема е да добавим допълнителен стейт “номер на текущия ход”. Така очевидно играта става ациклична, но не е ясно колко хода може да продължи една игра. Интуитивно, една игра не може да продължи твърде много ходове. Оказва се, че е достатъчно да считаме всяка игра продължила над 3N хода за равенство. Това не е строга граница, но е важно да отбележим, че ако считаме всяка игра продължила над N хода за равенство това не е правилен подход. При игра, в която имаме L=1, B=2, K=1, победител е Боби, но Лора може да “забави” играта до общо 2N хода.

Така описваме една позиция с $O(N^3)$ информация. За да изчислим една позиция трябва да разгледаме всички възможни ходове от нея. Това е O(L) или O(B) в зависимост от това кой е на ход, но и в двата случая е най-много O(N). Получаваме сложност O(N^4).

Подзадача 3 – O(N^3)

За тази подзадача човек трябва да се замисли, че макар играта да е циклична, тя е ***почти*** ациклична.

Нека позицията на Лора в даден момент е поле P_L, а позицията на Боби поле P_B. Да разгледаме как се изменя стойността $MAX(P_L, P_B)$ при даден ход. Ако никой от играчите не бутне другия назад, то просто едната стойност от двете се увеличава, и съответно $MAX(P_L, P_B)$ или се увеличава или не се променя. От друга страна ако единият играч бутне другия, то тогава бутнатият е бил по-напред и е задавал стойността на $MAX(P_L, P_B)$, но сега бутналият го е на тази позиция и стойността отново не се е променила. Така можем да заключим, че тази стойност е ***ненамаляваща*** в процеса на играта. Цикличността идва от това, че може да не се променя.

Нека разгледаме три поредни хода. Ако стойността $MAX(P_L, P_B)$ не се изменя, то това значи че и трита хода са били бутане. От друга страна можем да забележим, че ако три поредни хода са бутане, то имаме повторена позиция предизвикана от двамата играчи. Ако някой от играчите може да спечели, то той няма причина да участва в 3 поредни бутания. Следователно можем вместо бройка направени ходове да държим просто броя поредни бутания в последните ходове. Позиции с 3 поредни бутания могат да бъдат обявени за равенство. Забележете, че 2 поредни бутания **не** означават равенство. Това наблюдение доказва и коректността на решението за подзадача 2.

Това редуцира описването на позиция до O(2*3*N^2) = O(N^2).

Изчислението не е подобрено, съответно получаваме общо O(N^3)

Подзадача 4 – O(N^2)

За тази подзадача се изискваше трудната стъпка в задачата.

Тъй като работата с позиции имащи три възможни резултата (победа за Лора, победа за Боби и равенство) са по-сложни за анализ, то нека редуцираме играта, така че при изчисления да разглеждаме само печеливши и губещи позиции. Това правим като разглеждаме две хипотези. Първата хипотеза е, че Лора може да спечели. При тази хипотеза играта е абсолютно същата, но при равенство считаме, че Боби е победител. Подобно, при втората хипотеза, че Боби може да спечели, всички равни позиции са в полза на Лора. След пресмятане на двете хипотези можем да получим истинския отговор на позицията. Ако някоя от двете хипотези е вярна то позицията е печеливша за играчът за когото е хипотезата. Ако и двамата играчи не могат да спечелят от тази позиция, то позицията е равенство.

Нека си представим, че играчите можеха да стъпват на едно и също място и не можеха да се бутат. В такъв случай задачата е елементарна – всеки просто ще прави най-големия възможен за него ход, докато някой не стигне финала. Интуитивно, бутането не би трябвало да усложни задачата толкова много.

Нека направим няколко наблюдения за това как протича една игра и за това какви ходове правят играчите.

- След всеки свой ход Лора иска да се намира пред Боби. Тъй като $L \leq B$, то ако в даден момент Лора се намира зад Боби и е негов ход, то той може да спечели просто правейки само максимални ходове.
- Ако след максимален свой ход Боби може да се отдалечи на разстояние над L пред Лора, то той ще направи това и ще спечели, тъй като след следващият ход на Лора тя ще е зад него. Такъв ход на

Боби ще наричаме "***избягване***" и съответно ако Боби може да направи такъв ход казваме, че може да "***избяга***"

- Ако след своя ход Боби иска да се озове зад Лора, то той има смисъл да отиде само точно едно поле зад нея. Всяка друга позиция зад Лора просто би му дала по-малко възможности . Ход, в който Боби отива точно едно поле зад Лора ще наричаме "***пасивен ход***". На пръв поглед не е ясно дали изобщо Боби би искал да играе пасивен ход някога. Оказва се обаче, че има игри, в които Боби трябва да играе такъв ход ако иска да спечели. Най-малкият пример е играта "10 4 6 4". Ако Лора отиде от поле 1 в поле 5 на първия си ход, то единственият начин Боби да спечели играта е да отиде от 1 в 4 на своя първи ход. Т.е. да направи пасивен ход.

Интересните позиции в играта са тези директно след бутане на някой от играчите, както и директно след пасивен ход. Тези позиции са интересни понеже включват стратегически ход, който не се базира на това да отидем възможно най-напред. В такъв случай нека дефинираме няколко стойности, които просто отговарят на по-интересни стейтове:

$pushL_i =$ резултатът от позицията, в която Лора е на ход на поле $MAX(1, i-K)$, а Боби е на поле i

$pushB_i =$ резултатът от позицията, в която Боби е на ход на поле $MAX(1, i-K)$, а Лора е на поле i

$passive_i =$ резултатът от позицията, в която Лора е на ход на поле i, а Боби е на поле $i-1$

Резултат от позиция е резултатът при оптимална игра при започване от съответната позиция и може да бъде победа за Лора, победа за Боби или равенство. Очевидно тези стойности са резултатите съответно на позициите веднага след бутане на единия, както и позицията веднага след пасивен ход.

Да си представим обаче, че тези стойности са сметнати предварително и искаме да проверим хипотезата, че Лора може да спечели от дадена позиция. Тогава можем да симулираме игра "без бутане" подобно на грийди подхода:

- Ако Боби може да избяга, то той прави това. В противен случай той отива на най-далечното поле i, за която $pushB_i$ не е победа за Лора.
- На свой ход Лора отива до най-далечното поле i, за която $pushL_i$ е победа за Лора, както и $passive_i$ е победа за Лора.

По този начин не е нужно изобщо да разглеждаме бутания или пасивни ходове, тъй като никой от играчите няма да се постави в позиция, в която бутане би развалило целта му. Симулацията за да проверим хипотезата, че Боби може да спечели дадена позиция е аналогична.

Да забележим всъщност, че пресмятането на тези стойности решава и задачата, тъй като отговорът на задачата е $pushL_1$. Остава само някак да пресметнем тези стойности.

Нека сме пресметнали $pushL_j$, $pushB_j$ и $passive_j$ за всички $j > i$ и сега искаме да пресметнем $pushL_i$, $pushB_i$ и $passive_i$.

За пресмятане на дадена позиция използваме подхода на двете хипотези описан по-горе. Пресмятането на всяка от стойностите $pushL_i$, $pushB_i$, $passive_i$ става като просто тестваме двете хипотези започвайки от съответната позиция, използвайки симулациите без бутания посочени по-горе.

Малък проблем е, че на практика можем да имаме преходи между тези 3 позиции, а очевидно не можем да знаем стойностите им преди да ги пресметнем. Например от позицията на $pushB_i$ при $K \neq 1$ можем да преминем в тази на $passive_i$. Подобно можем да минаваме от $pushB_i$ към $pushL_i$ и обратно. Тази малка цикличност можем да оправим ръчно по следният начин:

- В симулациите приемаме, че преход от една от трите позиции съответстващи на $pushL_i$, $pushB_i$, $passive_i$ не можем да преминем към друга от тях. Тоест при симулация на $pushB_i$ първият ход не може да е бутане или пасивен ход и при симулация на $pushL_i$ първият ход не може да е бутане.
- След пресмятане на стойностите е нужно да направим корекции поради възможността за преходи между тях. Корекциите са две:
  - Тъй като от позицията за $pushB_i$ Боби може да премине към $passive_i$, то ако $passive_i$ е по-добра за Боби взимаме същият отговор за $pushB_i$. Така например ако симулациите заключат, че $pushB_i = draw$, но $passive_i = win\_Bobi$, то слагаме $pushB_i = win\_Bobi$.
  - Ако резултатът от $pushL_i$ е по-добър за Боби от $pushB_i$, то следва със сигурност и че $pushB_i$ е по-добро за Лора отколкото $pushL_i$. В такъв случай и двамата играчи започвайки от която и да е от двете позиции ще искат да преминат в другата. Това води до безкрайно прескачане и в такъв случай и двете позиции стават равенство. Във всеки друг случай и двете позиции запазват стойността си от симулациите.

За $i = 1$ никоя от двете корекции не се прави, тъй като преходите не са валидни!

Симулацията може да се имплементира за O(N) време. Пресмятайки дадените стойности отзад напред получаваме обща сложност O(N^2).

Подзадача 5 – O(N)

Стъпката към линейно решение е да използваме това, че в симулацията описана по-горе това един играч да е по-напред винаги е предимство за него.

Нека се представим, че Лора е на ход и се намира на поле P_L. Нека варираме позицията на Боби от 1 до N и проверяваме резултата от симулацията за хипотезата, че Лора може да спечели, за различни позиции на Боби. Тъй като от симулацията се вижда, че да си по-напред винаги е предимство, то за някои от първите стойности резултатът ще е, че Лора стига първа, а за всички останали, че Боби стига пръв. В такъв случай можем да дефинираме функцията:

$F_i =$ най-задното поле, на което може да се намира Боби, така че при симулация на хипотезата, че Лора може да спечели, започвайки с Лора на ход и на позиция i, Боби стига финалът пръв.

Можем да дефинираме и аналогична функция G за хипотезата, че Боби може да спечели:

$G_i =$ най-задното поле, на което може да се намира Боби, така че при симулация на хипотезата, че Боби може да спечели, започвайки с Лора на ход и на позиция i, Боби стига финалът пръв.

Да забележим, че $F_i \leq F_{i+1}$. За да видим защо това е вярно, да си представим, че Лора е на ход и започва от поле P_L, а Боби започва от поле P_B. Нека резултата от симулацията на хипотезата, че Лора печели, е че Боби стига финалът първи. Тогава е ясно, че ако повторим симулацията, но този път Лора започва от поле $P_L - 1$, то отново Боби ще стигне финалът пръв. От това очевидно следва, че $F_i \leq F_{i+1}$. Аналогично можем да покажем и $G_i \leq G_{i+1}$.

Ако пресметнем тези функции то лесно можем да предсказваме резултата от дадена симулация бързо. Например ако Лора е на поле P_L и на ход, а Боби е на поле P_B и искаме да тестваме хипотезата, че Лора може да спечели, то е нужно просто да проверим дали $F_{P_L} > P_B$. Ако пък отново са на тези полета, но Боби е на ход, можем да симулираме първия му ход и попадаме в позиция от предния вид.

В процеса на пресмятане отзад напред можем да пресмятаме и първите ходове от всяка симулация. Нека искаме да пресметнем F_i. Искаме да можем да проверим дали $F_i \leq x$. Тогава искаме да видим как би свършила симулацията за хипотезата, че Лора може да спечели, с Лора на ход на позиция i, и Боби на позиция x. Това можем да направим просто като направим по 1 ход от симулацията за двамата, след което се озоваваме в позиция, за която F е сметнато и можем да проверим отговорът константно. Ако се окаже, че Боби стига финала първи, то знаем че $F_i \leq x$, а в противен случай $F_i > x$. Тъй като знаем, че $F_i \leq F_{i+1}$, то можем да направим линейно търсене за F_i започвайки от F_{i+1} и намалявайки стойността, за която тестваме. Това ни дава амортизирано константно време за пресмятане на F_i. Функцията G се смята по аналогичен начин, просто за другата хипотеза. За да не се налага при пресмятане да използваме стойности, които още не са сметнати, то трябва да приемем, че $F_i \geq i - 1$. Това не е проблем, тъй като при оптимална игра Боби никога няма да е по-назад от 1 поле спрямо Лора при неин ход.

Така решението се реализира като едно обхождане от N към 1, поддържайки *няколко* стойности за всяко поле.

Автор: Енчо Мишинев