Анализ на задача "Игра"

Марин Шаламанов, Петър Петров

Ноември 2017

Нека да разгледаме една възможна последователност от задрасквания в края, на която редицата от числа е празна. Ще отбелязваме задрасканите числа с $\circ$, двойките числа, които падат заедно с отваряща и затваряща скоба. Например, нека имаме редицата

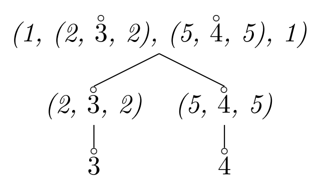
$$1, 2, 3, 2, 5, 4, 5, 1$$

Да задраскаме тройката и четворката. По следния начин можем да опишем какво се случва при тези задрасквания

$$(1, (2, \mathring{3}, 2), (5, \mathring{4}, 5), 1)$$

По този начин представяме редицата като съвкупност от "кръгчета"(задраскани елементи) и непресичащи се двойки (елементи, които падат заедно). Едно наблюдение е, че при този запис се губи информация - реда, в който сме задрасквали числата.

Ще отбележим, че всяко такова разделяне на двойки и кръгчета, всъщност определя едно дърво. Например, за разделянето $(1, (2, \mathring{3}, 2), (5, \mathring{4}, 5), 1)$ имаме корен $(1, (2, \mathring{3}, 2), (5, \mathring{4}, 5), 1)$, който има две деца $(2, \mathring{3}, 2)$ и $(5, \mathring{4}, 5)$. От своя страна върхът $(2, \mathring{3}, 2)$ има едно дете $\mathring{3}$ и аналогично $(5, \mathring{4}, 5)$ има единствено дете $\mathring{4}$.



Листата на това дърво са само елементи от вида $\circ$.

Това ще ни позволи от тук нататък да говорим за разделянето на двойки и като за дърво.

Дефиниция 1. *Максимално разделяне на напресчиащи се двойки (максимално дърво) ще наричаме такова разделяне, към което не могат да се добавят повече двойки.*

Например $(1, \mathring{2}, \mathring{3}, \mathring{2}, 1)$ не е максимално, защото може да се добави още една двойка $(1, (2, \mathring{3}, 2), 1)$

Твърдение 1. *В максимално разделение на непресичащи се двойки няма връх, който има две еднакви кръгчета за деца.*

Доказателство. Да предположим, че има такъв връх. Той ще изглежда така $(1 \ldots \mathring{2} \ldots \mathring{2} \ldots 1)$. Тогава можем да го заменим с $(1 \ldots (2 \ldots 2) \ldots 1)$, което ще е валидно разделяне на непресичащи се двойки, но ще има една двойка повече от това, с което започнахме. Т.е. то не е максимално. Противоречие. □

Твърдение 2. *По дадена редица от числа и максимално разделяне на непресичащи се двойки и кръгчета има последователност от толкова задрасквания колкото са кръгчетата, при която редицата се унищожава.*

Доказателство. Нека преобразуваме даденото максимално разделяне (дърво) в друго, по следния начин: Обхождаме върховете на дървото от листата нагоре (в обратния BFS ред). По този начин всеки път като посетим връх, вече ще сме посетили всички елементи в неговото поддърво. При посещаването на връх правим следното:

- Ако върхът е листо, не го променяме.
- Ако върхът не е листо, т.е. от вида $(1 \ldots 1)$, където единицата сме избрали без загуба на общност. Разлеждаме всички негови деца, които са от вида $(1 \ldots 1)$ или $\mathring{1}$. Т.е. разглеждаме единиците, които се срещат в децата му. На тези единици променяме, така че първата да е 1), втората (1, третата 1) и т.н. Ако са четен брой, променяме последния елемент на нашия връх на $\mathring{1}$. Например, ако разгледаният връх изглежда така

  $$(1 \ldots (1 \ldots 1) \ldots (1 \ldots 1) \ldots \mathring{1} \ldots (1 \ldots 1) \ldots 1)$$

  го променяме на

  $$(1 \ldots 1) \ldots (1 \ldots 1) \ldots (1 \ldots 1) \ldots (1 \ldots 1) \ldots \mathring{1}$$

  По този начин, разбира се, променяме структурата на дървото, но резултатът е отново валидно дърво (двойките продължават да са несамопресичащи се). Освен това броят на кръгчетата не се променя.

Така получихме ново разделение на двойки, което има същия брой двойки и кръгчета, т.е. също е максимално. Ако в него драскаме кръгчетата подред от ляво надясно редицата ще се унищожи.

□

Твърдение 3. *В дадена редица минималният брой задрасквания за унищожаване на редицата е равен на броя на кръгчетата в разделението на непресичащи се двойки с максимален брой двойки.*

Доказателство. Да предположим, че минималния брой е по-малък от този на кръгчетата. Тогава на това задраскване можем да съпоставим разделение на непресичащи се двойки. Това разделение, ще има повече двойки. Противоречие с максималността. В твърдение 2 показахме как можем да унищожим редицата с точно толкова задраскваия, колкото са листата в максималното дърво. Значи това е минималния брой задрасквания. ☐

Така задачата се свежда до намирането на разделението с най-много двойки. Това може да бъде намерено, чрез динамично програмиране.

```
//dp[len][startIndex] - the answer for the subsequence with
    length len starting from index startIndex
int dp[maxn+1][maxn+1];
for (int len = 1; len <= n; len++) {
  for (int i = 0; i+len <= n; i++) {
    dp[len][i] = dp[len-1][i+1];
    for (int j = i+1; j < i+len; j++){
      if (a[i]!=a[j]) continue;
      dp[len][i] = min(dp[len][i],
          2 + dp[j-i-1][i+1] + dp[len-(j-i+1)][j+1]);

    }
  }
}
cout << dp[n][0] << endl;
```