Анализ на задача `farm`

Тагове: префиксни суми, показалки, двоично търсене

Нулева подзадача – 0 точки

Тази подзадача е оставена за обратна връзка от системата.

Подзадача 1 – 10 точки

Ограниченията ни позволяват бавни решения. Най-лесният подход е да разгледаме всички правоъгълници и да намираме сумата на елементите в тях. За всеки правоъгълник фиксираме горен ляв и долен десен ъгъл.

Сложност: $O(N^3M^3)$

Реализация: `farm_mitko_10p.cpp`, `farm_kiki_10p.cpp`

Подзадача 2 – 25 точки

В подобна задача по един или друг начин ще трябва да използваме префиксни суми. Нека имаме префиксните суми на всяка колона от таблицата. В това решение използваме същата идея, но с префикси, за да намерим сумата на числата в дадена колона, които са между горната и долната страна в правоъгълника. Това ни маха единия цикъл.

Сложност: $O(N^3M^2)$

Реализация: `farm_mitko_25p.cpp`, `farm_kiki_25p.cpp`

Подзадача 3 – 40 точки

След като сме пресметнали префиксните суми, се оказва по-удобно да фиксираме първо горната и долната страна на правоъгълника, тоест реда на горния ляв и долния десен ъгъл. Защо? Ако ги фиксираме, можем да разширяваме правоъгълника по дължина. Нека също фиксираме лява (l) и дясна (r) страна, тоест колоната на горния ляв и долния десен ъгъл. Когато увеличаваме дясната страна, добавяме префиксната сума на новата колона в интервала от горната и долната страна, както правим в миналото решение. След това проверяваме дали тази сума е по-малка или равна на k и ако е, увеличаваме отговора.

Сложност: $O(N^2M^2)$

Реализация: `farm_mitko_40p.cpp`, `farm_kiki_40p.cpp`

Подзадача 4 – 65 точки

Продължаваме идеята от миналото решение. Знаем, че ако за някоя долна и горна страна, съответно лявата и дясната страна l, r отговарят на условието, тогава ако намалим дясната страна, интервалът също ще отговаря на условието. Това е знак за монотонност и ни позволява да направим двоично търсене по максималното възможно r за всяко фиксирано l, след което към бройката прибавяме $r-l+1$ възможни правоъгълници. Важно е да отбележим, че след като сме фиксирали горна и долна страна, правим един цикъл, в който си образуваме отделен префиксен масив, който отговаря за цялата фиксирана височина на правоъгълника. Това ни трябва, защото при двоичното търсене трябва за константно време да намираме сумата от лявата до дясната страна в правоъгълника.

Сложност: $O(N^2M\log M)$

Реализация: `farm_mitko_65p.cpp`, `farm_kiki_65p.cpp`

Подзадача 5 – 85 точки

Правим още една оптимизация. Поради монотонността, можем да направим показалки за всяка фиксирана горна и долна страна. Разширяваме интервала на показалките, докато отговаря на условието, че сумата е по-малка или равна на k. Като сме намерили такъв валиден интервал, отново добавяме $r - l + 1$ възможности към отговора. Вече не ни е нужен допълнителният префиксен масив, а можем да използваме този от предпоследното решение, защото добавяме и махаме една по една колоните.

Сложност: $O(N^2M)$

Реализация: `farm_mitko_85p.cpp`, `farm_kiki_85p.cpp`

Подзадача 6 – 100 точки

Тук нямаме ограничение за N и M, а само за тяхното произведение. Първата идея, за която бихме се досетили, е да използваме решението на подзадача 5, като разменим N и M, ако $N > M$. Всъщност, в случая това решение би работило. Нека докажем защо.

След размяната, от $N \leq M$ и $NM \leq 3.10^5$ следва, че $N \leq \frac{3.10^5}{N}$. От там $N^2 \leq 3.10^5, N \leq \sqrt{3.10^5}$. В най-лош случай за нашата сложност взимаме $N = \sqrt{3.10^5}$. Тогава M също ще е толкова и получаваме крайна сложност $O((\sqrt{NM})^3) = O(NM\sqrt{NM})$, което при тези ограничения е най-много около $1{,}6.10^8$ операции, достатъчно бързо на модерен компютър.

Сложност: $O(NM\sqrt{NM})$

Реализация: `farm_mitko_100p.cpp`, `farm_kiki_100p.cpp`

Алтернативно решение за подзадача 3

Следният подход се възползва от това, че ограниченията позволяват разглеждането на всеки правоъгълник, но трябва бързо смятане на сумата. Това може да се направи с двумерни префиксни суми. Нека $pref_{i,j}$ е сумата на елементите на правоъгълника с горен ляв ъгъл $1, 1$ и долен десен ъгъл i, j. Тогава можем да пресмятаме префиксните суми по следния начин: $pref_{i,j} = pref_{i-1,j} + pref_{i,j-1} - pref_{i-1,j-1} + a_{i,j}$. Вече можем, като сме фиксирали правоъгълник с горен ляв ъгъл a, b и долен десен ъгъл x, y, да пресметнем сумата ни по бърз начин, а тя е именно $pref_{x,y} - pref_{a-1,y} - pref_{x,b-1} + pref_{a-1,b-1}$. Лесно може да се докаже след разписване.

Сложност: $O(N^2M^2)$

Реализация: `farm_mitko_pref_40p.cpp`, `farm_kiki_pref_40p.cpp`

Автори: Димитър Шапатов, Кирил Зашев