

# Анализ на задача Managers

Автор: Румен Михов

Нека  $depth(v)$  е броят косвени мениджъри на служителя  $v$  (разстояние от корена). Търсената оценка е

$$S = \sum_{v=1}^N depth(v).$$

При фиксиран корен 1 тази сума е равна на сумата по всички ребра на размера на поддървото на детето. Ако  $sub(u)$  е размерът на поддървото на  $u$ , то

$$S = \sum_{(parent \rightarrow child)} sub(child).$$

Това позволява да поддържаме  $S$  и  $sub$  динамично.

Операцията повишение за  $(p, c)$  премества всички върхове по пътя от  $c$  до  $p$  (без  $p$ ) като директни деца на  $p$ . Поддървото на  $c$  не се променя, на  $p$  размерът на поддървото остава същото, аз останалите стават с размер 0.

## Подзадачи

**Подзадача 1:**  $N \leq 1000$ ,  $Q = 1$

Преизчисляване на  $S$  с DFS след единственото повишение. Сложност  $O(N)$ .

**Подзадача 2:**  $N \cdot Q \leq 10^7$

След всяко повишение правим DFS от корена и изчисляваме  $depth$  за всички върхове. Сложност  $O(N)$  на заявка, общо  $O(NQ)$ .

**Подзадача 4:**  $p$  е родител или дядо на  $c$

Дължината на пътя е 1 или 2. Ако пътят е с дължина 1, няма промяна. Ако е 2, местим само един връх  $x$  (родителя на  $c$ ). Намаляваме  $S$  с

$sub(x)$ , защото дълбочината на всички в поддървото на  $x$  намалява с 1. Размерите на поддърветата се коригират с константен брой операции. Сложност  $O(1)$  на заявка.

## Пълно решение (подзадача 5)

### Инициализация

С DFS от корена намираме:

- родител  $par[v]$ ;
- размер на поддървото  $sub[v]$ ;
- начална стойност  $S$  чрез сумата  $\sum sub(child)$ .

### Обработка на заявка

Нека  $h$  е разстоянието от  $c$  до  $p$  по текущите родители. Ще вървим от  $v = c$  нагоре, докато  $par[v] = p$ . За всеки връх  $v$  на пътя:

- всички върхове в поддървото на  $v$  намаляват дълбочината си с  $(h - 1)$ , затова

$$S \leftarrow S - (h - 1) \cdot sub[v];$$

- старият родител на  $v$  губи това поддърво, както и вече преместените върхове под  $v$ . Нека  $rem$  е общият брой върхове, които вече са преместени по пътя отдолу нагоре. Тогава

$$sub[par[v]] \leftarrow sub[par[v]] - (sub[v] + rem);$$

- правим  $par[v] = p$  и увеличаваме  $rem \leftarrow rem + sub[v]$ ;
- намаляваме  $h$  с 1 и се качваме към стария родител.

Така поддървото на всеки местен връх остава същото, а поддървото на всички предишни родители се намалява точно с броя извадени върхове.

## Сложност

Всяка заявка обхожда върховете по пътя от  $s$  до  $p$ . Сумарно това е  $O(N + S)$ , където  $S$  е сумата от дължините на заявките. Да отбележим, че тази сума не може да стане много голяма, тъй като всяка заявка намалява оценката с квадрат на дължината си.