Тагове	На пълното решение	На подзадачите
	Реше на Ератостен Канонично разлагане	Алгоритъм на Евклид Пълно изчерпване

Анализ

Подзадача №1

В тази подзадача са тестовите примери. Тя е за обратна връзка от системата.

Подзадача №2

Може да се забележи, че не може да се постигне по-добър НОД от първоначалния. Отговорът на въпрос за една двойка е техният текущ най-голям общ делител. Той може да бъде намерен чрез алгоритъма на Евклид.

Постигната сложност: $O(Q\ log_2\ N)$.

Подзадача №3

Винаги НОД-ът за (a_i, a_i^W) е $a_i^{\left\lfloor\frac{w+1}{2}\right\rfloor}$ ($\lfloor x \rfloor$ е равно на x, закръглено надолу). Например за $(2, 2^7)$ отговорът би бил 2^4, като се получи $(2^4, 2^4)$. За $(3, 3^4)$ отговорът би бил 3^2, като се получи $(3^2, 3^3)$. Намира се w_i, като постепенно b_i се дели на a_i. Така се изчислява и най-големият постижим НОД.

Постигната сложност: $O(Q\ log_2\ N)$.

Подзадачи №4

Ще разясня решението на следващите подзадачи със следния пример:

Нека разгледаме двойката $(270, 1000)$

Каноничните разлагания на числата в нея са:

$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5,$

$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

Следователно, $270 \times 1000 = (2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$.

Може да се забележи, че при извършването на една операция се преместват няколко числа от каноничното разлагане от едната скоба в другата. Например, ако 270 се раздели на 18 (а 1000 се умножи по 18), ще се получи $15 \times 18000 = (2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5) \times (\mathbf{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times 5 \times$

$5 \times 5)$ – преместват се една двойка и две тройки ($2 \times 3 \times 3 = 18$) от лявата в дясната скоба. От това следва, че произведението на една двойка числа не би се променило от операциите.

Нека след определен брой операции от начална двойка (a, b) се достигне двойка (c, d) с максимален НОД. Нека той да е равен на gcd. Тогава:

$$a \times b = c \times d = (gcd \times e) \times (gcd \times f)$$

$$a \times b = c \times d = gcd^2 \times e \times f$$

От това следва, че произведението на две числа от една двойка се дели на максималния възможен НОД, повдигнат на квадрат. Обхождат се всички кандидат-най-големи общи делители и се намира най-големият измежду тях. Забележете, максималният НОД винаги е $\leq N$.

Постигнатата сложност: $O(NQ)$

Подзадача №5

Най-големият общ делител на числата в една двойка е произведението на съвпадащите числа в скобите. Например за 270 и 1000 е 10, защото само 2 и 5 съвпадат – $(\mathbf{2} \times 3 \times 3 \times 3 \times \mathbf{5}), (\mathbf{2} \times 2 \times 2 \times \mathbf{5} \times 5 \times 5)$.

Възможно най-голям НОД би се получил когато всички числа в каноничните разлагания са разпределени равномерно в скобите. В горния пример, двойките не са разпределени равномерно (в първата скоба има само 1 двойка, а във втората – 3). Заради това се премества една двойка от дясната скоба в лявата:

$$270 \times 1000 = (2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$$

$$540 \times 500 = (\mathbf{2} \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5) \times (2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$$

Вече двойките са разпределени по две на скоба. Петиците обаче, не са разпределени равномерно (пак $1 - 3$), заради това се прави същото:

$$540 \times 500 = (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5) \times (2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$$

$$2700 \times 100 = (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times \mathbf{5} \times 5) \times (2 \times 2 \times 5 \times 5)$$

Остават само тройките, които са разпределени $3 - 0$. Тъй като тяхната бройка е нечетна, те не могат да се разделят поравно в двете скоби. Заради това се разпределят $2 - 1$, което е най-доброто постижимо:

$$2700 \times 100 = (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5) \times (2 \times 2 \times 5 \times 5)$$

$$900 \times 300 = (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5) \times (2 \times 2 \times \mathbf{3} \times 5 \times 5)$$

Най-големият общ делител ще съдържа 2 двойки, 2 петици и една тройка (всички числа които се споделят), $\text{НОД} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$.

Всъщност за някоя двойка (a, b), броят срещания на някое просто число x в скобите е равен на броят на срещанията му в каноничното разлагане на $a \times b$. Заради това, НОД-ът би зависел от $a \times b$ по следния начин:

Нека $a \times b = p_1^{cnt_1} \times p_2^{cnt_2} \times p_3^{cnt_3} \times \dots \times p_m^{cnt_m}$, като $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ са прости числа.

Тогава $\text{НОД} = p_1^{\left\lfloor \frac{cnt_1}{2} \right\rfloor} \times p_2^{\left\lfloor \frac{cnt_2}{2} \right\rfloor} \times p_3^{\left\lfloor \frac{cnt_3}{2} \right\rfloor} \times \dots \times p_m^{\left\lfloor \frac{cnt_m}{2} \right\rfloor}$, като $\lfloor x \rfloor$ е равно на x, закръглено надолу.

Каноничното разлагане на $a \times b$ се изчислява като първо се разложи a, после b, чрез обхождане до $\sqrt{N}$.

Постигната сложност: $O(Q\sqrt{N})$.

Подзадача №6

Запазва се идеята за канонично разлагане, само че се забързва. За всяко число от 1 до N се намира най-малкият му прост делител чрез Решето на Ератостен. Нека за x той да е div_x. Когато се разлага едно число y, се добавя div_y към разлагането и се продължава с y/div_y.

Постигната сложност: $O(Q\ log_2\ N)$

Автор: Борис Михов