**Задача C2. Дъжд**

**Анализ на решението**

**Решение със сложност O(N)**

Нека започнем с няколко очевидни наблюдения:

**Наблюдение 1**: Увеличаване на височината на преграда не може да намали количеството дъжд, събран в кутията.

**Наблюдение 2**: Намаляване на височината на преграда не може да увеличи количеството дъжд, събран в кутията.

**Наблюдение 3:** Количеството дъжд се определя еднозначно от крайните височини на преградите – редът на увеличаване не е от значение.

Следва, че максималното количество дъжд се получава при максимално увеличение на всички стени. Следва, че можем да увеличим всички прегради максимално, да намерим количеството дъжд, което ще събере кутията след това увеличение на преградите (това ще бъде търсеното максимално количество) и да търсим максималния брой от увеличените прегради, на които можем да махнем увеличението без да намалим събраното количество дъжд.

Разглеждаме преградите след максимално увеличение на всяка. С $H\_{i}$ ще бележим височината на преграда с индекс $i (заедно с евентуалното максимално увеличение)$. Нека $KL$ е индексът на най-високата, най-лява преграда, т.е. ако има няколко най-високи прегради, разглеждаме тази с минимален индекс. Нека също с $F\left(i\right)$ бележим индексът на първата преграда, която е с индекс по-голям от $i$ и е с височина строго по-голяма от $H\_{i}$.

Количеството дъжд събрано отляво на $K$ е:

* От $0$ до $F\left(0\right)$ с височина $H\_{0}$
* От $F\left(0\right)$ до $F\left(F\left(0\right)\right)$ с височина $H\_{F\left(0\right)}$
* т.н.

Просто казано, важни са само преградите с индекси $0, F\left(0\right), F\left(F\left(0\right)\right),…, K$. Нека за улеснение използваме нотацията $F^{0}\left(0\right), F^{1}\left(0\right), F^{2}\left(0\right)…$ В такъв случай нека разгледаме произволен индекс $i<K$. Имаме два варианта:

1. $i=F^{j}\left(0\right)$ за някое $j$. В такъв случай се е събрал дъжд между $i$ и $F\left(i\right)$ с височина $H\_{i}$. Всякакво намаляване на $H\_{i}$ ще намали общото количество дъжд – следователно не можем да променяме тази преграда.
2. В противен случай нивото на дъжда при $i$ е поне $H\_{i}$ и можем да намаляваме височината на преградата неограничено.

Така виждаме, че за всяка преграда $i<K$ можем еднозначно да определим дали може да се намали или не – следователно просто намаляваме всички, които можем.

Нека $K^{'}$ е индексът на най-високата преграда, като този път взимаме най-големия индекс ако има няколко такива. Получаваме решение за всички прегради $i>K^{'}$ обръщайки гореописания подход огледално.

Остава единствено решение за $K\leq i\leq K^{'}$. Разглеждаме два случая:

1. $K\ne K^{'}$

В такъв случай всяка преграда $K<i<K^{'}$ може да бъде намалена неограничено, тъй като нивото на водата в този сегмент е $H\_{K}$. Никоя от преградите $K$ или $K^{'}$ не може да бъде намалена, тъй като нивото на водата ще спадне

1. $K=K^{'}$

В този случай нека дефинираме индекса $L$ – най-високата преграда в интервала $\left[0, K\right)$ и индекса $R$ – най-високата преграда в интервала $\left(K, N\right)$. Имаме два подслучая:

* + $H\_{L}=H\_{R}$

В този случай преграда $K$ може да бъде намалявана неограничено, тъй като нивото в сегмента $\left[L, R\right]$ ще е $H\_{L}=H\_{R}$ независимо от височината на $K$.

* + $H\_{L}\ne H\_{R}$

В този случай преграда $K$ може да бъде намалена най-много с до $MAX\left(H\_{L},H\_{R}\right)$, тъй като в противен случай нивото на водата ще падне.

Така получаваме за всяка преграда до колко най-много може да бъде намалена, което лесно води до отговор на оригиналната задача.

От имплементационна гледна точка единствената интересна част е пресмятането на $F$, което е известна техника със стек със сложност $O\left(N\right)$. По-внимателен анализ показва, че няма нужда от пресмятане на *F* за всяко *i,* т.е. от прилагане на техниката със стека, тъй като ни трябват само $F^{0}\left(0\right), F^{1}\left(0\right), F^{2}\left(0\right)…$ и съответните в обратната посока. Намирането на максимумите може да стане в началото или просто в процеса на пресмятане на $F$. Във всеки случай общото решение е $O\left(N\right)$.