**Анализ на задача**

**ИГРА НА ДВЕ КУПЧИНКИ**

1. Динамично оптимиране. В тази задача такова решение може да бъде по-малко паметоемко, чрез използване на техниката „триъгълен масив“: поради равноправието на двете купчинки, двойката числа, с която работим, всъщност е ненаредена. Можем още да задълбаваме в икономията на памет (тук ни трябват два бита информация за всяко състояние), но това няма да помогне много: сложността е голяма и техниката в „чист вид“ няма как сериозно да подобри времето за по-големи входни данни.
2. Съображения, които подобряват стандартното решение:
* Елементарно се вижда, че играчът, който е на ход, не би искал да оставя състояние, за което отношението в купчинките е различно от началното: естествено е другият играч веднага да вземе всичко. Това просто съображение драстично намалява възможните ходове на играчите: всеки трябва да се стреми след хода му да остава отношение на топчетата в купчинките, равно на първоначалното.
* Можем да се задълбочим още в разглежданията. Нека отново за определеност да означим с *A* и *B* броя на топчетата в купчинките, като *A* ≤ *B* и *A* : *B* = α. Нека да изиграем правилен ход (*x*, *y*), *x* ≤ *y*. Както отбелязахме, за да не е той директно губещ, след него трябва да се случи едно от следните неща:

(*A* – *x*) : (*B* – *y*) = α (ако по-малкото вземем от *A*, а по-голямото – от *B*) или

(*B* – *x*) : (*A* – *y*) = α (ако по-малкото вземем от *B*, а по-голямото – от *A*).

Но от (*A* – *x*) : (*B* – *y*) = *А* : *B* 🡪 *B*(*A*-*x*)=*A*(*B*-*y*) 🡪 *AB*-*Bx*=*AB*-*Ay* 🡪 *Bx*=*Ay* 🡪

*x* : *y* = *A* : *B* = α (↯).

От това следва, че първият тип ход не може да се играе. Остава само вторият тип, което още повече стеснява възможните ходове.

1. И най-накрая – решение без игра:

Идеята е първият да вземе повече от *A* и по-малко от *B*, като остави отношение α, но така, че за вторият такъв ход да е невъзможен. Ясно е, че такъв ход, ако съществува, води до директна победа след хода на втория. И обратно: ако такъв ход не съществува, първият или трябва да остави отношение, различно от α (и да загуби веднага), или вторият също има възможност след правилен ход да остави отношение α. Тези разсъждения водят до извода, че при правилна игра броят на ходовете до края всъщност е 2 или 3: ако първият не може да остави отношение α, той губи на втория ход; ако пък може – печели на третия ход. Последното ще стане ясно от разсъжденията по-долу.

Нека с *d* означим най-големия общ делител на *A* и *B*. Ако *d*=1 (т.е., *A* и *B* са взаимно прости), първият играч няма печеливш ход: няма как да запази отношението α, тъй като това са най-малките числител и знаменател, които дават дроб със стойност α. Не е по-различен случаят *d* = *A* = *B*: за да остави отношение 1:1, първият играч трябва да вземе еднакъв брой (т.е., с отношение 1:1) топчета от двете купчинки, което е неправилен ход. В тези случаи програмата трябва да изведе 0. По-нататък ще считаме, че *A* < *B*.

Ако *d*>1, то *A*=*dA*1 и *B*=*dB*1, където *A*1 и *B*1 са взаимно прости и *A*1<*B*1. Искаме да знаем дали е възможно първият да остави след хода си *B*1 топчета в по-малката купчина и *A*1 – в по-голямата. Ако да, вторият изпада в описаната по-горе ситуация и губи. Тъй като *A*1<*A*<*B*, едната част от този план е явно осъществима: от купчинката с *B* топчета могат да се вземат *B*-*A*1. Дали втората част може да се реализира зависи от стойността на *A*. Ако *A*≥*B*1, отговорът е положителен: първият играч може да вземе *A*-*B*1 топчета от *A* (оставяйки в нея *B*1 топчета) и *B*-*A*1 топчета от *B* (в тази купчинка остават *A*1 топчета). Дали този ход е правилен? Да допуснем, че (*A*-*B*1) : (*B*-*A*1)=*B* : *А* 🡪 *A*2-*AB*1=*B*2-*BA*1 🡪 *d*2*A*12-*dA*1*B*1=*d*2*B*12-*dB*1*A*1 🡪 *A*12=*B*12 🡪*A*1=*B*1 (↯). Следователно, ако е възможен, този ход винаги е правилен. Напротив, ако не е възможен този ход (поради *А*<*B*1), няма да е възможен и никакъв друг печеливш: останалите кратни на *B*1 са по-големи от него. В такъв случай отново програмата трябва да извежда 0.

Тъй като след описания ход оставащите числа са взаимно прости, играчът на ход не може да остави отношение α и, след кой да е свой правилен втори ход, губи на третия ход.

Тази идея подлежи на обобщение. След хода на първия трябва да остава отношение α, т.е., в купчинките трябва да има съответно *kB*1 и *kA*1 топчета, където *k* е цяло положително число. Необходимите и достатъчни условия този ход да е осъществим, но вторият да не може да приложи същата стратегия, са $k\leq \frac{A}{B\_{1}}$ и $k<\frac{B\_{1}}{A\_{1}}$. Най-голямото цяло *k*, което удовлетворява и двете условия, е и решението на задачата. В зададените ограничения *k* може да е доста голямо, от порядък почти 1 000 000.

*Автор: Павлин Пеев*