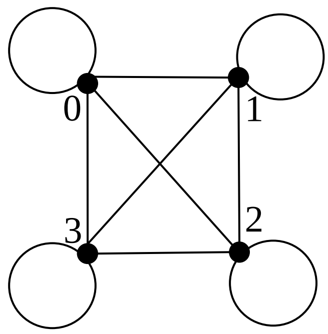
Анализ на решението на задача Домино



Нека всяко едно от числата от 0 до M е връх на мултиграф, а плочката с u и v точки в двете си половинки е ребро на мултиграфа. На Фиг. е показан съответният мултиграф при M = 3. Задачата се състои в разбиване на ребрата на мултиграфа във вериги, като всяко ребро участва в точно една верига, което ни насочва към Ойлеровите обхождания на мултиграфи.

Ойлеров цикъл (и съответно *Ойлеров път*) в мултиграф е такъв цикъл (път), който минава през всяко ребро на мултиграфа точно по веднъж. Нека първо припомним важни факти, свързани с понятието Ойлеров цикъл.

Лема. Във всеки мултиграф броят на върховете с нечетна степен е четен.

Доказателството на този факт е тривиално.

Теорема. В свързан мултиграф има Ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато всеки от върховете му е с четна степен.

Доказателството се основава на факта, че за всеки връх на мултиграфа, колкото пъти Ойлеровият цикъл влиза в един връх по неизползвано до момента ребро, толкова пъти трябва да го напусне по неизползвано до момента ребро.

Следствие 1. В свързан граф има Ойлеров път тогава и само тогава когато, точно два върха са с нечетна степен.

Доказателството се състои в добавяне на ребро между двата върха с нечетна степен, построяване на получилия се Ойлеров цикъл и премахване на добавеното ребро. В резултат получаваме Ойлеров път, който непременно започва в един от върховете с нечетна степен и завършва в другия.

Да приложим същата конструкция към мултиграф с $2k$ върха с нечетна степен – да съединим по двойки върховете с нечетна степен с k нови ребра. Ако построим получения Ойлеров цикъл и премахнем от него добавените ребра, той ще се разпадне на k непресичащи се по ребра пътя, като всяко ребро участва в точно един от пътищата. Дали това разбиване е минимално? Лесно се вижда, че при опит да направим Ойлерово обхождане тръгвайки от връх с нечетна степен непременно ще спрем в друг връх с нечетна степен, което показва че разбиването е минимално.

В задачата, обаче, има още един проблем. При примахване на плочки от набора, получилият се мултиграф **може да не е свързан**. Затова решението трябва първо да намери свързаните компоненти на мултиграфа, след което за всяка една компонента да построи съответното разбиване. Компонентите, които нямат върхове с нечетна степен ще бъдат покривани с една верига (която е цикъл), а всяка компонента с $2k$ върха с нечетна степен – с k вериги.

Известна техническа трудност създава фактът, че в получилия се Ойлеров цикъл една от веригите може да е разкъсана на две части, намиращи се в двата края на получения път и трябва внимателно да се съберат двете части при форматиране на изхода.

Кр. Манев