Анализ

Всеки състезател би трябвало да е запознат със стандартната задача, в която е даден масив с числа, и се търси подмасив с най-голяма сума (разбира се има и отрицателни числа иначе отговорът би бил целия масив с числа). Тук обаче нямаме пряк достъп до този масив, а можем да запитваме само въпроси за сравнения на сумите на подмасиви.

Първата подзадача е за 10 точки. Тук се очаква най-проста идея и разбиране на условието. Достатъчно е да проверим всеки два подмасива и да видим за кой ще се получи най-голяма стойност. Понеже сравнението е линейно, а подмасивите мога да са с размери близки до тези на целия и те са приблизително на брой $\boldsymbol{N}^2$, то сложността тук е $O(\boldsymbol{N}^3)$.

Втората подзадача е за 30 точки. Вече трябва да разгледаме един от алгоритмите за решаване на задачата със сумата. Можем да разгледаме всяка сума на подмасив като разлика на префиксни суми. Ако си фиксираме дясната позиция (с което е фиксирана едната префиксна сума) ни трябва префиксната сума (с позиция до дясната), която е възможно най-малката. За да определяме най-малката в началото очевидно започваме с префиксна сума 0, но в последствие трябва да проверим дали няма префиксна сума, която става по-малка от 0, а този елемент въобще не е задължително да присъства в масива, за да направим директна проверка с функцията. Нека допуснем, че даден префиксен подмасив е с отрицателна сума. Тогава ако разгледаме сумата му със следващия елемент, тя би била по-малка от самата стойност на този елемент. Обратно, ако е по-голяма или равна, значи тази префиксна сума е неотрицателна. Така вече можем да намерим първия префиксен подмасив с отрицателна сума (ако има такъв) и да го вземем като индекс за текуща най-малка сума. От тук нататък е лесно – всеки път сравняваме сумата за досегашния префикс със сумата за текущия префикс и запазваме този индекс, при който сумата е най-малка. Сравнението за отговора става без някакви особени трудности – просто се използва дадената функция и се гледа кога получаваме по-големи отговори. Като вземем предвид, че функцията за сравнение работи линейно и я използваме линеен брой пъти спрямо броя на елементите, сложността тук е $O(\boldsymbol{N}^2)$.

Третата подзадача е за 60 точки. Тук трябва да приложим по-нестандартна идея за сравнение, защото стандартната е линейна по броя извиквания на функцията, но самата функция за сравнение също е линейна по сложност и става квадратична сложността. Ще използваме подход разделяй и владей. Нека разделим масива на лява и дясна част, които да са приблизително равни. Да приемем, че сме решили задачата за всеки от тези масиви. Какъв е отговорът на първоначалната задача? Ами очевидно ще е или отговорът за лявата част, или отговорът за дясната част или някакъв подмасив, който включва средата. За да можем да определим кой е максималният подмасив (като сума), който включва средата, ще трябва да разширим задачата. Ще пазим за всяка част максималната префиксна и максилната суфиксна сума. По този начин вече можем да пресмятаме отговора за масив по намерена описаната информация за лявата и дясната част. Единствено остава да видим дали тези въведени данни се смятат лесно, което се оказва, че е така. Ако искаме да пресметнем максималната префиксна сума – тя ще е равна на тази на лявата част или на сумата на лявата част плюс максималната префиксна сума на дясната част. Аналогично за максималната суфиксна сума. Трябва да обърнем внимание, че проверките, които ще направим ще са линейни по дължината. Сега обаче нямаме проблем и в най-лошия случай, за да намерим отговора ще повторим два пъти дължината на целия масив, за да намерим максималната префиксна сума ще повторим 1 път и половина дължината на целия масив, както и за максималната суфиксна сума. Така на всяко ниво ще повтаряме максимално пет пъти дължините, т.е. цялата процедура ще има сложност от порядъка на $O(\boldsymbol{N}\log_2 \boldsymbol{N})$.

Автор: Илиян Йорданов