АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ИГРАТА „ДЕЛИМОСТ“

Да означим сумата на числата, когато остават m на брой числа, с S_m.

Очевидно, ако не останат числа в множеството ($n = k$), X печели, защото сборът накрая е 0. В противен случай, ако Y играе последния ход, то задължително Y ще има печеливш ход, защото има поне две различни възможности за ход, а X печели само ако Y вземе точно числото S_{n-k+1} % p (само тогава S_{n-k} % p = 0). Ако последното не е изпълнено, и k=1 просто трябва да проверим дали X има печеливш ход и ще знаем кой от двамата печели.

Вече можем да считаме, че $1 < K < N$ и последният ход е на X. В такъв случай предпоследният ход е на Y. Следователно сборът преди това е S_{n-k+2}.

Ако позицията е печеливша за X, то за всеки ход на Y, при който той взема a_i, съществува a_j сред оставащите числа, което му съответства, такова че $(S_{n-k+2} - a_i - a_j)$ % p = 0. Очевидно на a_j съответства a_i. Следователно можем да групираме всички оставащи числа по двойки със сбор който дава остатък S_{n-k+2} % p при деление на p. Нека $r = S_{n-k+2}$ % p. Оттук следва, че $n - k$ е четно (което значи, че, ако $n - k$ е нечетно, X губи) и че $(r * (n - k) / 2)$ % p = 0, защото след хода на X остават $(n - k) / 2$ двойки числа, всяка със сбор който дава остатък r при деление на p и сбора на всички n-k числа се дели на p. Нека $q = gcd(p, (n - k) / 2)$. Следователно r дели (p / q) и, тъй като $0 \le r < p$, то следва, че $r = i * (p / q)$, където $i = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ (В случаите, в които p е просто, следва че $q = 1$ и $r = 0$).

Лесно се забелязва, че, ако в началото числата не могат да се разпределят по двойки за никое r от указания вид и Y играе оптимално, то Y ще може да се погрижи и след k хода оставащите числа да не могат да се разпределят по двойки за никое r.

Сега ще докажем строго този факт индуктивно (в случая считаме, че последният ход е на X, и че $n - k$ е четно, защото останалите случаи вече са решени, следователно непосредствено преди всеки ход на Y остават четен брой числа):

База: непосредствено преди първия ход на Y за всяко r от показания вид съществуват поне две числа които нямат съответно сред оставащите.

Стъпка: Ще докажем, че ако непосредствено преди хода на Y, за всяко r от показания вид съществуват поне две числа, които нямат съответно сред оставащите, то съществува ход на Y, за който при всеки ход на X, отново за всяко r съществуват поне две числа, които нямат съответно сред оставащите.

За всяко r ще изберем две числа които нямат съответно. Множеството от всички тези числа, които сме избрали е от най-много $q * 2$ на брой числа, но $q \le (n - k) / 2$, откъдето следва, че $q * 2 \le (n - k)$. Преди всеки ход на Y остават повече от $(n - k)$ числа, следователно можем да махнем число извън това множество, което означава, че за всяко r ще останат по поне 2 числа без съответно и тъй като ходът на X премахва само едно число, очевидно и след него за всяко r ще остане поне едно число без съответно (тъй като те ще са четен брой и ги групираме по двойки, ще има поне 2 числа без съответно).

Ако Y играе по този начин на всеки ход докато останат n – k + 2 числа, те няма да могат да се разделят по двойки за никое r, следователно позицията не е печеливша за X.

Остана само да кажем, че ако непосредствено преди първия ход на Y, числата могат да се разделят по двойки за някое r, то за всеки ход на Y, X ще играе другото число от двойката и когато останат n – k на брой числа сборът им ще се дели на p (поради начина по който определихме r).

Кодът на задачата е прост. Първо има няколко if-а, които решават тривиалните случаи k=1, k=n, последният ход е на Y, $n - k$ е нечетно.

След това намираме q, и за всяко r намираме броя числа, които нямат съответно. Ако този брой е 0 или 1 – X печели (ако е 0 значи Y е първи, а ако е 1 значи X е първи, тъй като $n - k$ е четно и последният ход е на X). В противен случай Y печели. Сложността на решението е $O(n^2)$, тъй като единствената част от решението която е по-бавна от линейна е проверката дали можем да разбием числата на двойки за някое r. Имплементира се като първо сортираме масива $\{a_1, a_2, \dots , a_n\}$ и после за всяко r (броят различни стойности на r е $q \leq (n - k) / 2 < n$) линейно по броя на елементите в масива можем да проверим дали може да се разбие на двойки (разделяме го на 2 части – една $\leq r$ и втора $> r$ и за всяка половина тръгваме едновременно от началото и от края и опитваме да комбинираме числата по съответните двойки: ако сборът им е по-голям, намаляваме по-голямото, а, ако е по-малък, увеличаваме по-малкото, като и в двата случая увеличаваме броя числа, които нямат съответно. Ако сборът им е точно r (или $p + r$) променяме и двата индекса и не увеличаваме брояча – може да видите как действа тази част в авторовото решение). В крайна сметка сложността е $O(T.N^2)$

Автор: Даниел Атанасов