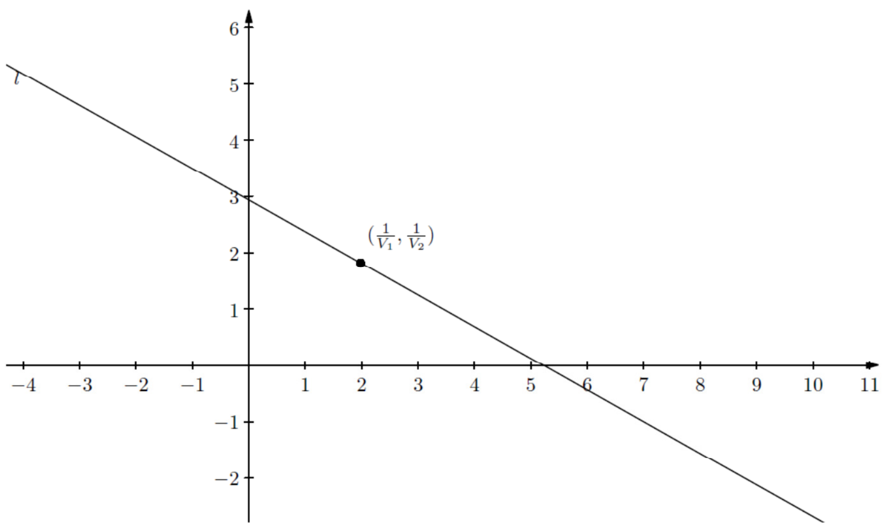
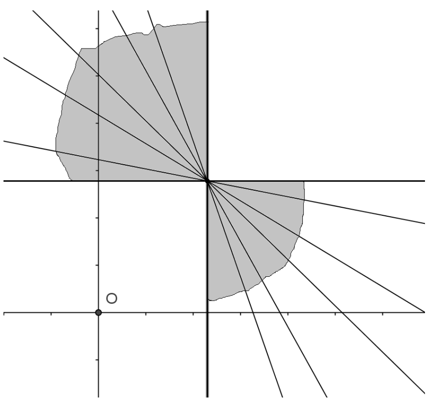
АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА БИАТЛОН

За да определим как да намерим кои състезатели могат да спечелят, нека разгледаме как се изразява времето на всеки от тях. $t = t_1 + t_2 = \frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2} +$. Нека сега разгледаме кои състезатели побеждава един състезател за фиксирани S_1 и S_2. За целта ще означавам скоростите на друг състезател с U_1 и U_2. Тогава текущият състезател побеждава другия тогава и само тогава, когато $\frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2} < \frac{S_1}{U_1} + \frac{S_2}{U_2}$. За простота нека заменим U_1 и U_2 съответно с $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. Като използваме, че в момента сме фиксирали V_1 и V_2 (разглеждаме конкретен състезател), получава се следното: $const < S_1x + S_2y$. За променливи x и y това всъщност е неравенство, описващо полуравнина, определена от правата $const = S_1x + S_2y$. Да разгледаме геометричното представяне на ситуацията (фиг. 1):



Фиг. 1



Фиг. 2

Нека с l означим правата, за която се достига равенство. Може да забележим, че точката $x = \frac{1}{V_1}, y = \frac{1}{V_2}$ принадлежи на правата (очевидно тогава също се достига равенство). Тогава всички точки с координати (x', y') над правата (полуравнината без точка (0, 0)) отговарят на всички състезатели, които биха били победени от състезателя със скорости V_1 и V_2. Друго наблюдение което може да направим, е че за всички S_1 и S_2 правата винаги минава през точка $\left(\frac{1}{V_1}, \frac{1}{V_2}\right)$: просто се получават прави под различен ъгъл (получава се половин сноп от прави през тази точка от успоредна на абсцисата до успоредна на ординатата, фиг. 2). Тези прави пресичат положителния лъч от оста Ox (ако приемем, че успоредната го пресича в $+\infty$).

Това значи, че на всеки състезател със скорости V_1 и V_2 можем да съпоставим точка с координати $\left(\frac{1}{V_1}, \frac{1}{V_2}\right)$. Тогава възможността един състезател да спечели се свежда до съществуване на права, минаваща през неговата точка (тази права отговаря на избор на S_1 и S_2), за която всяка друга точка (отговаряща на друг състезател) да е в полуравнината, несъдържаща (0, 0): именно това е геометричното тълкуване на факта другият състезател да е победен за този избор на S_1 и S_2.

На този етап задачата е почти решена. Остават само няколко лесни наблюдения. Първото е, че за точка, която не лежи на изпъкналата обвивка, няма как да изберем права, минаваща през нея, така че всички останали точки да са в една полуравнина спрямо нея. Т.е. състезателите, съответни на тези точки (нележащи на обвивката) няма как да спечелят. Остават точките върху обвивката и то тези от тях, инцидентни с права, която оставя всички точки от множеството в полуравнина, на която началото (0, 0) на координатната система не принадлежи. Неформално можем да наречем тази част от изпъкналата обвивка „югозападна“. Значи, само състезателите, отговарящи на точките от югозападната част на изпъкналата обвивка, могат да спечелят.

Съответно, достатъчно е да намерим югозападната част на изпъкналата обвивка и точките от това множество ще съответстват на всички състезатели, които могат да спечелят. Остава само едно нещо, за което да се внимава, и то е, че състезател печели, само когато има **единствено** минимално време. Значи трябва да изключим точките по обвивката, които не са във върховете ѝ –такива състезатели могат да имат минимално време, но не единствено. Също така трябва да изключим и точките, които отговарят на повече от един състезател: състезатели, които имат едни и същи съответни скорости са неразличими и едновременно печелят или не, но времето им не е уникално. След тези дребни уточнения можем да решим задачата със сложност $O(NlogN)$, използвайки Graham scan за намиране на обвивката. Данните не налагат използване на реална аритметика, тъй като скоростите са цели числа. Трябва само да се внимава при пресмятането на ориентираните лица (получават се четвърти степени на данните и трябва да се работи в long long, предвид ограниченията).

Има и възможни решения, които не изискват толкова досещания. Друго наблюдение, което може да ни реши задачата без използване на геометричната интерпретация, е един прост начин да определяме дали състезател може да бъде победен. Нека разгледаме един състезател и да видим при какви условия винаги може да бъде победен от някой от останалите.

Една възможност е да съществува състезател, който винаги да го побеждава или да завършва наравно с него, т.е. да съществува състезател, всяка съответна скорост на когото е по-голяма или равна на скоростта на този, който разглеждаме.

Нека сега текущият състезател (v), който разглеждаме, има скорости V_1 и V_2. Твърдим, че за да няма как да спечели, достатъчно е да има двама състезатели u и w, които винаги да го побеждават. Ще обосновем това по-късно и ще видим каква логика води до това. Нека тези състезатели са със скорости U_1, U_2 и W_1, W_2. За да го побеждават тези двама състезатели, трябва единият да го бие поне в едната дисциплина, а другият – поне в другата. Наистина, ако той бие и двамата в една от дисциплините, избирането на дължина нула за другата би довело до по-предно място и от двамата в биатлона, което е противоречие с избора им. Т.е., без ограничение на общността, можем да считаме, че $U_1>V_1$ и $W_2>V_2$.

Сега да си представим как постепенно меним отношението на S_1 и S_2 от безкрайност към 0. В началото победител между тримата ще е състезателя u, после евентуално v и накрая w. Не е сигурно, обаче, дали няма да се премине директно от u към w, без v да печели по което и да е време. Като разгледаме такива S_1 и S_2, за които u и w имат равни времена, можем да проверим дали за тези S_1 и S_2 победител от тримата е v. Така ще разберем дали v изобщо може да ги победи, а ако не ги победи в този случай, тогава до от победи на u ще се премине директно към победи на w. Тази проверка става със сложност O(1). Значи константно можем да определим дали даден състезател v някога побеждава други двама състезатели u и w.

Сега да се върнем към въпроса защо ако v побеждава всяка двойка състезатели за някои S_1 и S_2, то той побеждава всички. Ако пак разгледаме плавната промяна на отношението на S_1 и S_2 ще видим, че постепенно се сменят различни победители. v може да се появи на само едно място в този списък от победители (ако изобщо печели). Т.е. ще е между някакви двама други победители. Очевидно, когато печели, той ще побеждава всяка двойка състезатели. Ако пък не печели, тази двойка състезатели (между която би се намирал, ако печели) винаги ще го побеждават.

Следователно, можем да проверим всеки състезател *v* с всяка двойка състезатели *u* и *w* и така да разберем дали *v* може да спечели. Това дава решение със сложност $O(N^3)$. Обаче, ако сме малко по-хитри, можем за връх *v* линейно да намерим двойката върхове, между която би се намирал във списъка с победители, и тогава ще е достатъчно да проверим само за тази двойка дали ги побеждава или не. Това решение е със сложност $O(N^2)$.

Има и още едно възможно решение и то е най-лесното за измисляне изобщо: да пробваме кой печели за различни отношения на S_1 и S_2. Това решение, написано добре, би успяло, евентуално, само в първата подзадача.

Тази задача е интересна заради геометричната си интерпретация. Такъв подход, познат в линейните оптимизационни задачи, може да е много полезен.

Автор: Иво Дилов