АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА

ИГРА

Нека $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Да означим с y_n най-ниската цена, която Георги трябва да заплати, за да познае числото $x \in A_n$ независимо от избора на Иван. Ясно е, че $y_1 \le y_2 \le y_3 \le \dots \le y_n$. В сила са равенствата: $y_1 = 0$, $y_2 = \max\{a, b\}$, $y_n = \min_{1 \le t \le n-1}\{\max\{a + y_t, b + y_{n-t}\}\}$ за $n = 3, 4, 5, \dots$. Коректната имплементация на тези зависимости решава успешно първата подзадача със сложност $O(n^2)$.
За решаване на втората подзадача ще използваме следните твърдения:
Да означим с $g_k = \max\{a + y_k, b + y_{n-k}\}$ за $k = 1, 2, \dots, n-1$.
Твърдение 1: Ако $1 \le i < j < n$ и $g_i < g_j$, то за всяко цяло число $t \in [j, n-1]$ е в сила неравенството $g_i < g_t$.
Доказателство:

1. Ще докажем, че $g_j = a + y_j$. Да допуснем, че $g_j = b + y_{n-j}$. В сила са неравенствата $a + y_i \le a + y_j \le b + y_{n-j} \le b + y_{n-i}$. Следователно $g_i = b + y_{n-i}$. От $g_i < g_j$ получаваме, че $y_{n-i} < y_{n-j}$, откъдето следва, че $j < i$, което е противоречие. Следователно $g_j = a + y_j$.
2. Нека $j < t < n$. Верни са неравенствата $b + y_{n-t} \le b + y_{n-j} \le a + y_j \le a + y_t$. Следователно $g_t = a + y_t$. Получаваме $g_i < g_j = a + y_j \le a + y_t = g_t$.

Да означим с $q_k = \max\{a + y_k, b + y_{n+1-k}\}$ за $k = 1, 2, \dots, n$.
Твърдение 2: В сила са неравенствата $g_k \le q_k$ за $k = 1, 2, \dots, n-1$.
Доказателство: $g_k = \max\{a + y_k, b + y_{n-k}\}$, $q_k = \max\{a + y_k, b + y_{n+1-k}\}$. Редицата $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ е растяща. Следователно $b + y_{n-k} \le b + y_{n+1-k}$ и $g_k \le q_k$.
Твърдение 3: Нека $p = \max\{i : g_i = \min_{1 \le k < n} g_k\}$. За всяко цяло число $t \in [1, p)$ е в сила неравенството $q_t \ge q_p$.
Доказателство:

1. Нека $g_p = q_p$. В сила са неравенствата $q_t \ge g_t \ge g_p = q_p$.
2. Нека $g_p < q_p$. От $g_p = \max\{a + y_p, b + y_{n-p}\}$ и $q_p = \max\{a + y_p, b + y_{n+1-p}\}$ следва, че $q_p = b + y_{n+1-p}$. В сила са неравенствата $a + y_t \le a + y_p \le b + y_{n+1-p} \le b + y_{n+1-t}$. Следователно $q_t = b + y_{n+1-t}$. Тъй като $y_{n+1-t} \ge y_{n+1-p}$, то $q_t \ge q_p$.

От доказаните твърдения следва, че y_n може да се намери със сложност $O(n)$ като се приложи следния алгоритъм:

```
y_1 = 0; p = 1;
for(i = 2; i ≤ n; i++)
{
    y_i = max(a + y_p, b + y_{i−p});
    for(j = p + 1; j < i; j++)
    {
      v = max(a + y_j, b + y_{i−j});
      if(y_i ≥ v){ y_i = v; p = j;}
      else break;
    }
}
```

В третата подзадача $a = 1$, а $b \in (0,1\,000)$. Ще докажем, че в този случай е вярна следната теорема:

Теорема: Нека числовата редица $f_1, f_2, f_3, \ldots$ се задава рекурентно с равенствата: $f_m = m$ за всяко $m = 1, 2, \ldots, b$; $f_m = f_{m-1} + f_{m-b}$ за всяко $m > b$. Тогава, ако $n \in (f_{m-1}, f_m]$ и $m \geq 2$, то $y_n = m + b - 2$.

Доказателство:

I. Ще докажем, че твърдението е вярно за $m = 2, 3, \ldots, b$. В този случай $m \in (f_{m-1}, f_m]$ и трябва да покажем, че $y_m = m + b - 2$. При $m = 2$ за откриване на числото x са необходими b евро. Нека твърдението е вярно при $m = k$, т.е. $y_k = k + b - 2$ за $k = 2, 3, \ldots, b - 1$. Ще покажем, че $y_{k+1} = k + b - 1$. Ако първият въпрос на Георги е множество с един елемент, то за да познае x ще са му необходими $\max\{1 + y_k,\ b\} = \max\{b + k - 1, b\} = b + k - 1$ евро. Ако първият въпрос на Георги е множество с $p \geq 2$ елемента, при положителен отговор той ще трябва да заплати $b + y_p = 2b + p - 2 \geq 2b > b + k - 1$ евро. Следователно $y_{k+1} = k + b - 1$.

II. Допускаме, че твърдението е вярно при $m = 2, 3, \ldots, k$. Ще покажем, че ако $n \in (f_k, f_{k+1}]$, то $y_n = k + b - 1$. Нека първият въпрос на Георги да е множество с p елемента. Ще разгледаме 5 случая:

1. $p = f_{k-b+1}$. За да познае числото x, Георги трябва да заплати $\max\{1 + y_{n-p}, b + y_p\} = \max\{1 + y_{n-p}, k + b - 1\} = k + b - 1$ евро, защото $n - p \leq f_k$ и $1 + y_{n-p} \leq 1 + k + b - 2 = k + b - 1$. Следователно $y_n \leq k + b - 1$.
2. $p \in (f_k, f_{k+1}]$. Тъй като $p > f_k$, то $y_p \geq y_{f_k} = k + b - 2$. При положителен отговор Георги трябва да заплати $b + y_p \geq 2b + k - 2 \geq k + b - 1$ евро.
3. $p \in (f_{k-b+1}, f_k]$. Тъй като $p > f_{k-b+1}$, то $y_p \geq k - b + 2 + b - 2 = k$. При положителен отговор Георги трябва да заплати $b + y_p \geq b + k$ евро.
4. $p \in (f_{k-b}, f_{k-b+1})$. При положителен отговор Георги трябва да плати $b + k - b + 1 + b - 2 = k + b - 1$ евро.
5. $p \in (0, f_{k-b}]$. В този случай $n - p \geq f_k + 1 - f_{k-b} = f_{k-1} + 1$. При отрицателен отговор Георги трябва да заплати поне $1 + k + b - 2 = k + b - 1$ евро.

От направените разглеждания следва, че ако $n \in (f_k, f_{k+1}]$, то $y_n = k + b - 1$.

С това теоремата е доказана.

Като се използва доказаното твърдение, лесно се решава третата подзадача.

Автор: Младен Манев