АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
РЕДИЦИ

Задачата може да се формулира и по следния начин: Да се намери най-голямото цяло число a, за което системата $\begin{vmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = a \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0 \end{vmatrix}$ няма решение в цели числа (да припомним, че $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са дадени цели положителни числа (при това x_1 и x_2 са взаимно прости), а неизвестните са $y_1, y_2, \ldots, y_n$). Ще покажем, че при $n = 2$ такова най-голямо a винаги съществува. Вярна е следната

Теорема: Ако $1 < x_1 < x_2$ са две взаимно прости цели числа, то най-голямото цяло число a, за което системата $\begin{vmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 = a \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{vmatrix}$ няма решение е $x_1x_2 - x_1 - x_2$.

Преди да докажем това твърдение, да разгледаме две конкретни числа. Нека $x_1 = 4$ и $x_2 = 7$. Ще запишем естествените числа в таблица, съдържаща 4 колони и безброй много редове, като попълваме числата последователно по редове, започвайки от 1.

1	2	3	4
5	6	$\boxed{7}$	8
9	10	11	12
13	$\boxed{14}$	15	16
17	18	19	20
$\boxed{21}$	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Всички числа, записани в последната колона са кратни на 4. Следователно, ако a е равно на някое от тях, системата ще има решение. След това започваме да отбелязваме в таблицата числата, кратни на 7 до момента, в който във всяка от първите три колони имаме отбелязано число. Така системата ще има решение за всяко от числата, които са оцветени в червено, а няма да има решение за оцветените в черно числа (помислете защо). Така търсеното най-голямо число, за което системата няма решение, е това което е над 21, т.е. 17. Тъй като числата 4 и 7 са взаимно прости, то лесно може да пресметнем кое ще е последното оградено число (3.7), а това, което е над него ще бъде $3.7 - 4 = 17$.

Сега да разгледаме общия случай, когато x_1 и x_2 са взаимно прости цели числа, за които $1 < x_1 < x_2$. Съставяме по аналогичен начин таблица, която има x_1 стълба и записваме в нея естествените числа. След това отбелязваме в таблицата последователно числата, кратни на x_2 докато във всяка от първите $x_1 - 1$ колони получим поне по едно отбелязано число. Числата $0x_2, 1x_2, 2x_2, \ldots, (x_1 - 1)x_2$ образуват пълна система остатъци по модул x_1, защото x_1 и x_2 са взаимно прости (казано с други думи всеки две от тези числа попадат в различни колони от таблицата), което означава, че последното оградено число е $(x_1-1)x_2$, а числото над него е $(x_1-1)x_2-x_1=x_1x_2-x_1-x_2$, с което теоремата е доказана.

Така имаме формула, която може да се приложи за решаване на подзадача 2.

Тук ще отбележим, че тази формула може да служи като горна граница за отговора, когато $n\geq 3$. Тъй като за всички числа a, които са по-големи от $x_1x_2-x_1-x_2$ системата $\begin{vmatrix} x_1y_1+x_2y_2=a \\ y_1\geq 0, y_2\geq 0 \end{vmatrix}$ има решение, то за тях ще има решение и системата $\begin{vmatrix} x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=a \\ y_1\geq 0, y_2\geq 0,\ldots,y_n\geq 0 \end{vmatrix}$. Наистина, ако наредената двойка числа (α_1,α_2) е решение на първата система, то наредената n-торка числа $(\alpha 1,\alpha 2,0,\ldots,0)$ е решение на втората система. Следователно при $n\geq 3$ отговорът на задачата е най-много $x_1x_2-x_1-x_2$.

При ограниченията на първата подзадача, това означава, че той със сигурност няма да надвишава 1000000. Това позволява в този случай задачата да се решава динамично. Нека $ans(m)=0$, когато системата няма решение при $a=m$ и $ans(m)=1$, когато системата има решение при $a=m$. Ясно е, че $ans(m)=1$, точно тогава когато $ans(m-x_1)=1$ или $ans(m-x_2)=1$ или … или $ans(m-x_n)=1$. Пресмятанията на стойностите на $ans(m)$ извършваме докато намерим x_1 на брой последователни стойности на m, за които $ans(m)=1$. Тогава търсеният отговор на задачата ще е последната намерена стойност на m, за която $ans(m)=0$.

Този алгоритъм обаче няма да може да се използва за решаване на последната подзадача, тъй като тогава стойността на $x_1x_2-x_1-x_2$ е много голяма. В този случай може да използваме отново идеята от доказателството на теоремата. Отново съставяме таблицата и започваме да отбелязваме в нея числа до момента, в който във всяка от първите x_1-1 колони се появи по едно оградено число. Числото над последното оградено е търсения отговор. Кои числа обаче трябва да отбелязваме? Това са всички числа, които могат да се образуват по формулата $p_2x_2+p_3x_3+\cdots p_nx_n$, където p_1, p_2, ..., p_n са неотрицателни цели числа, такива че $p_2x_2+p_3x_3+\cdots p_nx_n\leq x_1x_2-x_1-x_2$. При зададените ограничения в условието на третата подзадача лесно се вижда, че техният брой не надминава 1000000. Генерираме тези числа, подреждаме ги по големина и започваме последователното им отбелязване в таблицата.

Автор: Младен Манев