АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ABWORDS

Задачата е от изследователски тип – невъзможно е да се види добро решение без разглеждане на получени резултати с просто, но сигурно решение. Затова пък самите връзки са доста очевидни и лесно се откриват, така че трудността като цяло е по-скоро средна.

Ясно е, че два пъти последователно прилагане на $\mathbf{R_1}$ ще породи непосредствено повтаряне на по-предишната стойност в редицата от междинни резултати, което е допустимо само при случая N=2 (с отговори `AA` или `AB`). Оттук нататък ще считаме, че $N > 2$.

Можем да гледаме на думите като на двоични записи на естествени числа. Поради спецификата на участие на буквите `A` и `B` в правилата и тъй като първата буква се запазва и при двете действия, т.е., и при преобразованията, удачно е да гледаме на буквата `A` като на бит 1, което ще ни позволи да моделираме зададените действия като действия над множеството от n-битовите двоични числа при фиксирано n.

Трябва да си дадем проста сметка, че за всяка фиксирана дължина на думите L съществува или не съществува N-преобразование и това не зависи от думата. Както казахме, ако гледаме на текущата дума като на двоичен запис на числото M, за това можем да се досетим от „побитовия“ смисъл на двете зададени операции: първата е инверсия на последния бит, а втората – побитово изключващо или на M с $2M$ (M, „отместено“ с един бит наляво и допълнено с нула), като полученият резултат е побитово отместен отново надясно. И в двете операции за конкретни стойности на битовете не става дума, операцията „изключващо или“ е инволютивна и затова се оказва, че ако някоя тяхна комбинация поражда „повторение“ върху някоя дума, тя го поражда на същия етап за коя да е друга дума със същия брой букви.

Ще забележим също, че прилагането на $\mathbf{R_2}$-$\mathbf{R_1}$ дава същия резултат като $\mathbf{R_1}$-$\mathbf{R_2}$. Това ни позволява да пропуснем разглеждане на голям брой алтернативи: доколкото две операции от тип $\mathbf{R_1}$ не бива да следват една след друга, ако ще се прилагат такива, можем да считаме, че те са, например, на последните места от редицата операции, разделени с една операция $\mathbf{R_2}$.

Интересен факт е, че прилагането само на действия $\mathbf{R_2}$ върху която и да е дума <u>е преобразование</u>, т.е. след няколкократно прилагане непременно се поражда зададената дума (от което, разбира се, следва, че междувременно не се получава повторение, иначе процесът би „зациклил“ между двете „вътрешни“ повторения). Дължината на това преобразование, както казахме, също няма да зависи от самата дума, а само от броя букви в нея. Тук можем да кажем и по-точно: преобразованието, съставено само от действия $\mathbf{R_2}$, е с дължина 2^p, ако дължината на думата е в интервала $[2^{p-1}+1, 2^p]$. Откриването на това правило може да донесе точки: в тестовите примери има няколко точни степени на двойката.

Долната граница на търсената дължина се определя от факта, че, като фиксираме първия бит в 1, всички различни думи с дължина L са 2^{L-1} и, тъй като повторение не е позволено, трябва $N \leq 2^{L-1}$, т.е. $L > \mathbf{log}_2 N$. Първата дължина след тази граница, за която съществува N-преобразование, е решение на задачата. Тестването на възможните преобразования се ограничава до: N пъти $\mathbf{R_2}$; $\mathbf{R_1}$, следвана от N-1 пъти $\mathbf{R_2}$; $\mathbf{R_1}$-$\mathbf{R_2}$-$\mathbf{R_1}$, следвана от N-3 пъти $\mathbf{R_2}$; и така нататък. По-обстойно изследване на получените резултати ще ни доведе и до явен вид на N-преобразованията и отпадане на това търсене.

Нека за следващите разглеждания отбележим с 2^p първата степен на двойката, надминаваща N, т.е., да е изпълнено $N \in (2^p, 2^{p+1}]$. Тогава редицата от преобразования

$\underbrace{22222222\cdots 2}_{2^{p+1}-N \text{ пъти } 2}\underbrace{212121\cdots 21}_{N-2^{p} \text{ пъти } 21}$ е едно решение на задачата. Умна проверка на такова генерирано преобразование по низ с увеличаваща се дължина може да реши около 40% от задачата. Последната крачка към константно решение е съобразяването на точния брой букви в думата, върху която се прилага конструираната редица. Изследването на резултатите ни води към следното правило: при четно N, дължината на думата е $2^{p}+1$, а при нечетно N тя е $2^{p-1}+2$.

Автор: Павлин Пеев