АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО
НА ЗАДАДА XOR

Наивното решение с квадратична сложност $O((b–a+1–n) \times n)$, което проверява всяка n-орка, преизчислявайки операцията отначало, не трябва да получи точки. То може лесно да се преобразува в линейно $O(b–a)$, като се ползва, например, очевидното $\oplus_{i=a+1}^{b+1} i = a \oplus (\oplus_{i=a}^{b} i) \oplus (\mathrm{b}+1)$. За поне такова решение са предвидени 20% от точките.
По-нататъшното ускоряване на изчислителния процес предполага други методи или по-задълбочени наблюдения.
За изчисляването на „побитово изключващо или“ върху n-орка от последователни числа е достатъчно операцията да се извърши с не повече от три от последните елементи. Може да се забележи, че при четно начало на n-орката всеки четвърти междинен резултат е нула, а при нечетно – всеки четвърти след първия е равен на първия. Това просто наблюдение прави сложността на предишното решение $O(b\text{-}a\text{-}n)$, което е съществено при сравними n и $b\text{-}a$. Доказателството на тези свойства е елементарно и се основава на добре известния факт (който следва пряко от дефиницията), че, всъщност, редът на изпълнението на операцията „побитово изключващо или“ не е от значение – важна за резултата е само четността на броя единици във всички операнди във всеки от двоичните разреди. Тогава $a\oplus(a+1)\oplus(a+2)\oplus(a+3) = (a\oplus(a+1))\oplus((a+2)\oplus(a+3))$. Ако a е четно, $a+1$ се различава от него само по най-младшия бит, т. е. $a\oplus(a+1) = 1$, аналогично $(a+2)\oplus(a+3) = 1$ и, следователно, $(a\oplus(a+1))\oplus((a+2)\oplus(a+3)) = 1\oplus1=0$. Ако a е нечетно, $a+1$ е четно и оттам $a\oplus(a+1)\oplus(a+2)\oplus(a+3)\oplus(a+4) = a\oplus((a+1)\oplus(a+2)\oplus(a+3)\oplus(a+4)) = a\oplus0 = a$.
По-нататъшно следствие е, че ако n е нечетно, резултатите върху n-орките с начала a, $a+2$, $a+4$, … растат (с по 2 на всяка стъпка, което, всъщност, не е важно за нашия алгоритъм), както и тези, с начала $a+1$, $a+3$, $a+5$, …. Тогава за получаване на резултата в този случай е достатъчно да изведем по-големия резултат от операцията върху последните две n-орки в интервала. При описаното бързо пресмятане на операцията, това решение е константно.
Остава да разгледаме най-интересния случай на четно n. При него търсим n-орка, в която колкото може по-старши битове се срещат нечетен брой пъти. Всъщност, от казаното по-горе е ясно, че, щом n е четно, като разгледаме пак операцията върху последователни двойки числа, ще получим следното:

- Ако n се дели на 4 и началото s е четно, резултатът е 0;
- Ако n не се дели на 4 и началото s е четно, резултатът е 1;
- Ако началото s е нечетно, резултатът е:
  - при $n=4k+2$: $r=s\oplus[((s+1)\oplus(s+2))\oplus((s+3)\oplus(s+4))\oplus\ldots \oplus((s+n-3)\oplus(s+n–2))]\oplus(s+n–1)$. Както показахме, изразът в средните скоби е 0, следователно в този случай се получава $\boxed{r=s\oplus(s+n–1)}$.
  - при $n=4k$: $r_1=s\oplus[((s+1)\oplus(s+2))\oplus((s+3)\oplus(s+4))\oplus\ldots]\oplus[(s+n–3)\oplus(s+n–2)]\oplus(s+n–1)$. Изразът в първите средни скоби е нула, а във вторите е 1. Така в този случай $r_1=s\oplus(s+n\text{-}1)\oplus1=r\oplus1$. Формулата е същата, както в предишния случай, с най-младши бит нула.

Казано в резюме, няма смисъл да разглеждаме n-орки с четно начало. Търсим такова нечетно s, $a \le s \le b–n+1$, което максимизира съответното r.
$a\oplus b$ е число, най-старшият значещ бит на което е възможният (и осъществим!) най-значещ бит и на r. Осъществяването му в резултата води до следното: ако това е бит номер v (броено от 0 от дясно наляво), в интервала $[a, b]$ задължително се среща числото t, чийто двоичен запис започва с общото начало на a и b (ако има такова) и завършващо с $2^{v} = \overline{1\underbrace{00\cdots0}_{v \text{ пъти}}}_{(2)}$.
Тогава s е някъде в околността на $[t\text{-}1, t]$. Можем са положим $a = \max(a, t–n+1)$ и $b = \min(b, t+n–1)$, което прави търсената област не по-голяма от $2n$ (което значи нечетните начала в нея – не повече от n). Линейния алгоритъм с начало (новото) a и брой стъпки не повече от n решава въпроса в този случай.

Автор: Павлин Пеев