

ЕСЕНЕН ТУРНИР ПО ИНФОРМАТИКА

Шумен, 10–12 ноември 2006 г.

Тема за група В (10-11 клас)

Задача В1. ФИБОНАЧИ

Разглеждаме редица от цели числа, в която първият и вторият член са равни на 1, а всеки следващ е равен на сумата на двата предишни за него члена в редицата. Напишете програма **fib**, която въвежда целите числа n и m , и извежда остатъка при делението с m на n -тия член на редицата ($0 < n < 10^{15}$, $0 < m < 10^7$).

Пример. Вход

1 1

Изход

0

Решение:

Наивният начин за пресмятане на n -тото число от редицата на Фибоначи ($f_1 = 1, f_2 = 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$) няма да може да реши задачата, поради твърде големия брой итерации за големи стойности на n :

```
long long int f1=1, f2=1, f;
for(long long int i=3; i<=n; i++)
{
    f=f1%m+f2%m;
    f1=f2;
    f2=f;
}
cout << f;
```

Един възможен подход за решаване на задачата се основава на използване на формули, чрез които можем бързо да пресмятаме, например като скачаме от n -тия член f_n направо на $2n$ -тия f_{2n} . Това може да се осъществи чрез двойката равенства, чието доказателство се извършва с математическа индукция:

$$f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2; \quad f_{2n} = f_n^2 + 2f_n f_{n-1}$$

или да използваме по-общото равенство:

$$f_{n+m} = f_{m+1} f_n + f_m f_{n-1}$$

(виж: Clifford A. Reiter. *Fast Fibonacci Numbers*, The Mathematica journal 2(3) 1992. Clifford A. Reiter, *Fibonacci Numbers: Reduction Formulas and Short Periods*, *The Fibonacci Quarterly*, 31(4) 1993, pp. 315-324. Воробиев, Н. Н., Числа Фибоначи, изд. Наука, Москва, 1978 г.)