

ЕСЕНЕН ТУРНИР ПО ИНФОРМАТИКА

Шумен, 10–12 ноември 2006 г.

Тема за група В (10-11 клас)

Задача В1. ФИБОНАЧИ

Разглеждаме редица от цели числа, в която първият и вторият член са равни на 1, а всеки следващ е равен на сумата на двата предишни за него члена в редицата. Напишете програма **fib**, която въвежда целите числа n и m , и извежда остатъка при делението с m на n -тия член на редицата ($0 < n < 10^{15}$, $0 < m < 10^7$).

Пример. Вход

1 1

Изход

0

Решение:

Наивният начин за пресмятане на n -тото число от редицата на Фибоначи ($f_1 = 1, f_2 = 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$) няма да може да реши задачата, поради твърде големия брой итерации за големи стойности на n :

```
long long int f1=1, f2=1, f;
for(long long int i=3; i<=n; i++)
{
    f=f1%m+f2%m;
    f1=f2;
    f2=f;
}
cout << f;
```

Един възможен подход за решаване на задачата се основава на използване на формули, чрез които можем бързо да пресмятаме, например като скачаме от n -тия член f_n направо на $2n$ -тия f_{2n} . Това може да се осъществи чрез двойката равенства, чието доказателство се извършва с математическа индукция:

$$f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2; \quad f_{2n} = f_n^2 + 2f_n f_{n-1}$$

или да използваме по-общото равенство:

$$f_{n+m} = f_{m+1} f_n + f_m f_{n-1}$$

(виж: Clifford A. Reiter. *Fast Fibonacci Numbers*, The Mathematica journal 2(3) 1992. Clifford A. Reiter, *Fibonacci Numbers: Reduction Formulas and Short Periods*, *The Fibonacci Quarterly*, 31(4) 1993, pp. 315-324. Воробиев, Н. Н., Числа Фибоначи, изд. Наука, Москва, 1978 г.)

Друг подход се основава на следната трансформацията, при която от дадена тройка последователни числа на Фибоначи, се получава следващата тройка: $(f_{i-2}, f_{i-1}, f_i) \rightarrow (f_{i-1}, f_i, f_{i+1})$ чрез матрично умножение:

$$\begin{pmatrix} f_{i+1} & f_i \\ f_i & f_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i & f_{i-1} \\ f_{i-1} & f_{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ако означим

$$A_i = \begin{pmatrix} f_i & f_{i-1} \\ f_{i-1} & f_{i-2} \end{pmatrix}, \quad f_0 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

пресмятането по модул m на степента $A_n = (A_2)^{n-1}$ може да се извърши с алгоритъм за бързо повдигане на степен чрез функцията `power`:

```
int a[][]={{1,0},{0,1}}, p[][]={{1,1},{1,0}};
void power(long long int n)
{
    if (n > 1) {power(n/2); a = mul(a,a);}
    if (n%2==1) a=mul(a,p);
}
```

където първоначално a е единичната матрица, p е заредена с елементите на A_2 , а `mul` е функция за умножение на две матрици, като елементите на произведението се пресмятат по модул m . Това осигурява логаритмична изчислителна сложност вместо линейната сложност при наивния подход.

Емил Келеведжиев

Задача B2. ABC

Разглеждаме равнобедрен триъгълник с върхове точките A, B, C и с лице, равно на единица. Разделяме го на 4 по-малки еднакви равнобедренни триъгълника, като ползваме средите на страните му за върхове на новите триъгълници. Тези триъгълници означаваме съответно с буквите O, A, B и C , в зависимост от това, дали имаме предвид централния от тях, или тези, които са разположени откъм върховете A, B или C на първоначалния триъгълник. Всеки един от последните три по-малки триъгълници (триъгълниците A, B и C) го разделяме отново по същия начин на 4 още по-малки триъгълника. За да ги означим, ползваме също буквите O, A, B или C , но добавени към буквата, означаваща триъгълника, от който всеки нов триъгълник съответно е получен. Така имаме триъгълници $AO, AA, AB, AC, BO, BA, BB, BC, CO, CA, CB$ и CC . Разглеждаме триъгълниците от това второ поколение, и за тези от тях, чието означение не завършва с O , повтаряме същата операция и получаваме следващото трето поколение триъгълници: $AAO, AAA, AAB, \dots$, и т.н. Така продължаваме построяването и на още следващи поколения триъгълници.

Напишете програма **abc**, която въвежда последователност от низове от описания вид (всеки низ задава триъгълник от някое поколение), и пресмята лицето на тази част от равнината, която е покрита със съответните на тези низове триъгълници. Лицето трябва да бъде изведено като обикновена несъкратима дроб, представена от числителя и знаменателя си, записани на един ред в стандартния изход и разделени с един интервал.