

Задача В1. Две и три

Разполагаме с неограничен брой десетични цифри 2 и 3. С част от тях искаме да напишем десетично число, което да се дели на 2^n , където n е естествено число. При това търсим най-малкото такова число.

Ако например $n = 4$, една цифра не стига да напишем такова число: 2 е четно, но не се дели на $2^4 = 16$, 3 пък направо е нечетно. С две цифри от наличните могат да се напишат (по големина) 22, 23, 32 и 33. Числото 32 вече има нужното ни свойство (впрочем, то се дели даже и на $2^5 = 32$). Факт е, че например 33232 също изпълнява условието, но то е много по-голямо. Няма изискване и двете цифри да се срещат задължително в записа, нито пък да са с равен брой срещания.

Напишете програма **N23**, която намира желаното число или установява, че такова не съществува.

От стандартния вход се въвежда един ред, съдържащ естественото число n , $1 \leq n \leq 10000$.

На стандартния изход програмата трябва да изведе един ред с намереното най-малко естествено число, в десетичния запис на което има само цифрите 2 и 3 (по колкото е необходимо от всяка от тях) и което се дели на 2^n ; или един ред със съобщението NO, ако такова число не съществува.

Пример. Вход:

11

Изход:

223232

Решение

Още от основния училищен курс за десетично записаното естествено число m е известно, че:

- дели се на 2, ако е четно (т.е. – последната му (една) цифра се дели на 2);
- дели се на 4, ако числото, образувано от последните му две цифри се дели на 4 (ако е едноцифрено, можем да считаме, че има водеща нула);
- дели се на 8, ако числото, образувано от последните му три цифри се дели на 8 (отново можем да дописваме водещи нули, ако няма достатъчно цифри).

Обобщението на тези правила се очаква и лесно се доказва: m се дели на 2^n тогава и само тогава, когато числото, образувано от последните му n цифри в същия ред се дели на 2^n (ако цифрите на m не стигат, можем да си мислим, че има водещи нули).

Като вземем предвид и елементарното съображение, че щом m се дели на 2^n , то се дели и на всички по-малки степени на двойката, заключаваме, че с ограничения ресурс от десетични цифри трябва да изграждаме „опашки“ от n цифри, гарантиращи делимостта на 2^n . В нашия случай се оказва, впрочем, че такава „опашка“ е еднозначно определена. Наистина – последната цифра задължително е 2, иначе пропада делимостта на 2; предпоследната – задължително 3, което осигурява делимост на 4; следващата по старшинство – задължително 2, иначе няма делимост на 8 и т. н.

Алгоритъмът за изграждане на тази редица се оказва елементарен, което еднозначно ни осигурява число, записано с общо n на брой цифри (двойки и тройки), което се дели на 2^n , т.е. задачата винаги има решение с не повече от n цифри. По-интересно е изискването да се намери най-малкото решение. Наистина, 23232 (което е опашката от пет цифри) се дели на $2^5 = 32$, но още $32 = 00032$ има това свойство (и се записва само с две цифри).

Алгоритъм за получаване на опашката. Да разгледаме сега по-подробно аритметиката на получаване на редицата $\{c_i\}$ от цифри в „опашката“, започвайки от най-младшата – c_1 . Единствената възможност, както споменахме, е $c_1 = 2$. Всяка от следващите (по старшинство) цифри от „опашката“ m трябва да осигурява делимост на още една степен на двойката. На i -тата стъпка ($i > 1$) ще имаме $c_i = 2$ или $c_i = 3$, т. е., ако означим с

естественото число, записано с $m_i = c_i \cdot 10^{i-1} + m_{i-1}$ тези цифри в този ред, имаме:

като изборът е еднозначно
 „досегашната опашка“ m_{i-1} вече се дели и на 2^i
 или не. Наистина, ако $m_{i-1} = 2^i \cdot k$, където k е
 възможност да
 2 е да вземем
 (не втората, защото $m_i = 3 \cdot 10^{i-1} + m_{i-1} = 3 \cdot 2^{i-1} \cdot 5^{i-1} + 2^{i-1} \cdot t = 2^{i-1} (3 \cdot 5^{i-1} + t)$
 се дели на 2^i ,
 $m_i = \begin{cases} 2 \cdot 10^{i-1} + m_{i-1} \\ или \\ 3 \cdot 10^{i-1} + m_{i-1} \end{cases}$ определен от това, дали
 (на 2^{i-1} тя задължително се дели)
 естествено число, единствената
 получим още един делител на
 първата алтернатива:
 тогава първото събираемо не
 второто се дели сумата не се