

Нека разгледаме алгоритъм на Дейкстра в пълния граф P с начален връх i . На всяка стъпка от алгоритъма избираме оня връх j , за който разстоянието от i до j е най-малко измежду разстоянията от i до върховете, които не са избрани досега. Заедно с такъв връх j , ние избираме и ребро, което е последното в най-късия път от i до j . Нека на всяка стъпка се стремим това ребро да е минимално, т.е. ако има няколко пътя до j , да избираме този, за който последното ребро е минимално. Съвкупностите от тези ребра образуват покриващо дърво на графа P , което ще означим с $D(i)$.

Твърдим, че графа G е обединение на дърветата $D(i)$ за всеки връх i .

Доказателство: Тъй като върховете на дърветата и G съвпадат, разглеждаме само ребрата. Нека реброто $r(a, b)$ е от $D(i)$ за някое i и дължината му е len . Тогава разстоянието между a и b е равно на len (дължината е по-малка или равна на len , но не може да е по-малка, тъй като пътят до b би бил по-къс, без да се включва $r(a, b)$). Тогава върховете a и b в G са свързани или с $r(a, b)$, или с някакъв друг път със същата дължина. Но ако са свързани с път, то последното ребро в този път е по-късо от $r(a, b)$, което е противоречие с минималността на последното ребро за пътя от i до b .

Нека $r(a, b)$ е ребро от G , с дължина $lenr$. Нека разгледаме $D(a)$. Реброто $r(a, b)$ или е ребро от $D(a)$, или в $D(a)$ има друг път между a и b . Нека допуснем, че има друг път $a, x_1, x_2, \dots, b$ с дължина len . От това, че $D(a)$ е построено с алгоритъм за минимална дължина от a до всеки връх следва, че $len \leq lenr$. Но от първата част на доказателството всяко от ребрата $r(a, x_1), r(x_1, x_2), \dots, r(x_n, b)$ е от G . Тогава в G има път с дължина len ($len \leq lenr$), свързващ a и b . Тогава реброто $r(a, b)$ е излишно, защото не променя разстоянието между a и b в G , както и кое да е друго разстояние в G . Това е в противоречие с минималния брой ребра в G . Оттук следва, че $r(a, b)$ участва в $D(a)$.

С това доказахме, че графът G е обединение на дърветата $D(i)$ за всеки връх i . В доказателството съществено използвахме и факта, че дължините на ребрата са положителни.

Задача A2. Цифри

Дадено е число N , записано в K -ична бройна система, $2 \leq K \leq 36$. Главните латински букви A, B, C, D, E, F, ... означават цифри, съответно със стойности 10, 11, 12, 13, 14, 15, Дадена е и една цифра M (число между 0 и 9, или главна латинска буква, такава че цифрата която тя означава е по-малка от K). Да се напише програма **DIGITS**, която намира колко пъти цифрата M се използва за записването на всички числа от 1 до N в K -ична бройна система.

На първия ред от входния файл са записани числото R ($1 \leq R \leq 1000000$) (което задава дължината на числото N), цифрата M (записана с десетично число от 0 до $K - 1$) и числото K , всичките разделени с интервал. На следващия ред се намира числото N , записано в K -ична бройна система. То се състои от последователни цифри, без интервал между тях.

На единствения ред в изходния файл програмата трябва да изведе търсения брой, записан в K -ична бройна система.

В около 40% от тестовете M ще е равно на 0.

В около 20% от тестовете $R \leq 6$.

В около 50% от тестовете $R \leq 5000$.

Примерен вход:

6 11 36

GWFERZ

Съответният изход:

3CMATS

Примерен вход:

6 0 10

107351

Съответният изход:

49517